

非轴对称光腔模式的代数分析方法

卢亚雄

(电子科技大学光电子技术系, 成都 610054)

提要 使用代数方法得到了非轴对称光腔基横模椭圆高斯光束光腰位置及其大小所满足的方程组以及稳定性条件。具有简单、准确及适用范围广的优点。

关键词 非轴对称光腔, 模式, 复曲率张量

Algebraic analysis method of mode for axially-asymmetric optical resonators

LU Yaxiong

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract A new method to analyse the mode of axially-asymmetric optical resonators is proposed. The algebraic equations for the sizes and the locations of the beam waists of the ellipse Gaussian beam, as well as the stability condition are obtained. This method has the advantages of simple, easy and universal validity.

Key words axially-asymmetric optical resonator, mode, complex curvature tensor

1 引言

非轴对称光腔是由非轴对称镜(例如椭球面反射镜或柱面反射镜)以及像散介质(其在子午与弧矢面上的等效光程不同)所组成的谐振腔。根据张量 $ABCD$ 定律^[1]

$$\begin{cases} Q_{ii}^{-1} = (C + DQ_i^{-1})(A + BQ_i^{-1})^{-1} \\ Q_{ii} = (AQ_i + B)(CQ_i + D)^{-1} \end{cases} \quad (1)$$

以及光束复曲率张量 Q ^[2], 可以求得所有类型的非轴对称光腔的椭圆高斯光束基横模的自洽解。但仅在往返一周矩阵元 B 和 C (2×2 矩阵) 满足 $B^t = B$ 和 $C = C^t$ (t 表示矩阵的转置运算) 的条件下, 才能分别得到上述两个方程的矩阵形式的解析解^[2]。因此, 矩阵方法的使用受到限制, 主要适用于腔镜处 $B = B^t$ 的非轴对称直腔的情况^[2,3]。

本文从张量 $ABCD$ 定律出发, 得到复曲率张量四个元素满足的简化的代数方程。一般非轴对称光腔基横模的自洽解, 归结于该代数方程组的求解。这一方法可用于 $C \neq C^t$ 的非轴对称光腔模式的求解, 因而具有重要的意义。

2 代数方程组的推导

对于非轴对称光腔, 往返一周矩阵元 A, B, C, D 以及复曲率张量 Q 均是 2×2 矩阵, 且 Q 是转置对称的。由(1)式

$$QCQ + QD - AQ = B \quad (2)$$

转置上式

$$QC'Q + D'Q - QA' = B' \quad (3)$$

用 C' 右乘(2)式,利用文献[2]的(6)式与(7)式:

$$AD' - BC' = E, \quad CD' = DC'$$

其中 E 是 2×2 单位矩阵,可以得到

$$(QC - A)(QC' - D') = -E \quad (4)$$

类似地可由(3)式得到

$$(QC' - D')(QC - A) = -E \quad (5)$$

设在坐标系 (x, y, z) 下具有 $Q = Q'$ 性质的复曲率张量 Q 写为

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} Q_- & 0 \\ 0 & Q_+ \end{pmatrix} R(-\theta) \quad (6)$$

其中 $R(\theta)$ 是横坐标旋转 θ 角的变换矩阵:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

A, B, C, D 是以参考平面 RP 算起的非轴对称光腔往返一周矩阵元,且其形式为

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \quad (F = A, B, C, D) \quad (8)$$

令矩阵方程(4)式两端的对应元素相等,可得到四个代数方程。由前两个方程消去与 Q_1 有关的项,得到方程

$$\begin{aligned} & C_1 \det C Q_1^2 + C_4 \det C Q_2^2 + (C_2 + C_3) \det C Q_1 Q_2 + (C_1 C_4 D_1 + C_2 C_4 D_2 - C_1 C_2 D_3 - C_3^2 D_4 - A_1 \det C) Q_1 \\ & + (C_3 C_4 D_1 + C_4^2 D_2 - C_2 C_3 D_3 - C_2 C_4 D_4 - A_2 \det C) Q_2 + (A_1 D_3 + A_2 D_4) C_2 - (A_1 D_1 + A_2 D_2) C_4 \\ & = -C_4 \end{aligned} \quad (9)$$

而由矩阵第二行第一列与第二行第二列的元素相等的两个代数方程中消去与 Q_1 有关的项,得到

$$\begin{aligned} & -C_1 \det C Q_2^2 - C_4 \det C Q_1^2 - (C_2 + C_3) \det C Q_2 Q_1 + (C_1 C_3 D_1 + C_2 C_3 D_2 - C_1^2 D_3 - C_1 C_2 D_4 + A_3 \det C) Q_2 \\ & + (C_3^2 D_1 + C_3 C_4 D_2 - C_1 C_3 D_3 - C_1 C_4 D_4 + A_4 \det C) Q_1 + A_3 D_3 + A_4 D_4) C_1 - (A_3 D_1 + A_4 D_2) C_3 \\ & = C_1 \end{aligned} \quad (10)$$

对矩阵方程(5)式作同样的处理,有

$$\begin{aligned} & C_1 \det C Q_1^2 + C_4 \det C Q_2^2 + (C_2 + C_3) \det C Q_1 Q_2 + (D_1 \det C - A_1 C_1 C_4 + A_2 C_1 C_3 - A_3 C_3 C_4 + A_4 C_3^2) Q_1 \\ & + (D_3 \det C - A_1 C_2 C_4 + A_2 C_2 C_3 - A_3 C_4^2 + A_4 C_3 C_4) Q_2 + (A_2 D_1 + A_4 D_3) C_3 - (A_1 D_1 + A_3 D_3) C_4 \\ & = -C_4 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -C_1 \det C Q_2^2 - C_4 \det C Q_1^2 - (C_2 + C_3) \det C Q_2 Q_1 - (D_2 \det C + A_1 C_1 C_2 - A_2 C_1^2 + A_3 C_2 C_3 - A_4 C_1 C_3) Q_2 \\ & - (D_4 \det C + A_1 C_2^2 - A_2 C_1 C_2 + A_3 C_2 C_4 - A_4 C_1 C_4) Q_1 - (A_1 D_2 + A_3 D_4) C_2 + (A_2 D_2 + A_4 D_4) C_1 \\ & = C_1 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 \det 表示矩阵的值:

$$\det C = C_1 C_4 - C_2 C_3 \quad (13)$$

分别从(9),(10)式中减去(11),(12)式,得到 Q_1, Q_2 与 Q_4 之间的线性关系式:

$$Q_1 = (m - aC_4 Q_2)/b \quad (14)$$

$$Q_4 = (n - aC_1 Q_2)/p \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} a = (A_1 - D_4)C_2 - (A_2 + D_3)C_1 + (A_3 + D_2)C_4 - (A_4 - D_1)C_3 \\ m = -C_2(A_1D_3 + A_2D_4) + C_3(A_2D_1 + A_4D_3) - C_4(A_3D_3 - A_2D_2) \\ b = (A_1C_3 - C_2D_4)C_2 - (A_2C_3 + C_2D_3)C_1 + (A_3C_3 + C_2D_2)C_4 - (A_4C_3 - C_2D_1)C_3 \\ n = (A_2D_2 - A_3D_3)C_1 - (A_1D_2 + A_3D_4)C_2 + (A_3D_1 + A_4D_2)C_3 \\ p = (A_1C_2 - C_3D_4)C_2 - (A_2C_2 + C_3D_3)C_1 + (A_3C_2 + C_3D_2)C_4 - (A_4C_2 - C_3D_1)C_3 \end{cases} \quad (16)$$

因此,由(14),(15)式以及(9)~(12)式中的任一式所组成的方程组即是复曲率张量 Q 的元素所应满足的方程组。

从(14),(15)以及(11)式求得解为

$$\begin{cases} Q_2 = -\frac{y}{2x} + \frac{i\sqrt{4xz - y^2}}{2|x|} \\ Q_1 = \frac{m}{b} - \frac{aC_4y}{2xb} + \frac{i|aC_4|\sqrt{4xz - y^2}}{2|xb|} \\ Q_4 = \frac{n}{p} - \frac{aC_1y}{2xp} + \frac{i|aC_1|\sqrt{4xz - y^2}}{2|xp|} \end{cases} \quad (17)$$

式中已由(6)式及 Q 的意义选择了方根的符号,且

$$\begin{cases} x = C_4 \det C [a^2 C_1 C_4 - ab(C_2 + C_3) + b^2] \\ y = (D_3 \det C - A_1 C_2 C_4 + A_2 C_2 C_3 - A_3 C_4^2 + A_4 C_3 C_4) b^2 \\ \quad - (D_1 \det C - A_1 C_1 C_4 + A_2 C_1 C_3 - A_3 C_3 C_4 + A_4 C_3^2) ab C_4 \\ \quad - 2C_1 C_4 \det C ma + (C_2 + C_3) \det C mb \\ z = C_1 \det C m^2 + (D_1 \det C - A_1 C_1 C_4 + A_2 C_1 C_3 - A_3 C_3 C_4 + A_4 C_3^2) mb \\ \quad + [(A_2 D_1 + A_4 D_3) C_3 - (A_1 D_1 + A_3 D_3) C_4 + C_4] b^2 \end{cases} \quad (18)$$

将复曲率张量写为实部与虚部两部分之和

$$Q = L + i \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (19)$$

$$L = R(\alpha) \begin{pmatrix} l(+), & 0 \\ 0 & l(-) \end{pmatrix} R(-\alpha) \quad (20)$$

$$\frac{\pi W_0^2}{\lambda} = R(\beta) \begin{pmatrix} \pi \omega_0^2(+)/\lambda & 0 \\ 0 & \pi \omega_0^2(-)/\lambda \end{pmatrix} R(-\beta) \quad (21)$$

则 $\pi \omega_0^2(+)/\lambda$ 与 $\pi \omega_0^2(-)/\lambda$ 及 β 角满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{\pi \omega_0^2(\pm)}{\lambda} = \frac{1}{2} \left[T_r \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) \pm \sqrt{\Lambda(\omega)} \right] \\ \cos^2 \beta = \left(\frac{\pi \omega_0^2(+)}{\lambda} - \text{Im} Q_1 \right) / \left[2 \frac{\pi \omega_0^2(+)}{\lambda} - T_r \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) \right] \end{cases} \quad (22)$$

其中 Im 表示取复数虚部的运算, T_r 为矩阵求迹运算,由(17)式得

$$\begin{cases} T_r \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) = (|aC_4p| + |aC_1b|) \sqrt{4xz - y^2} / 2|xbp| > 0 \\ \det \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) = (a^2|C_1C_4| - |bp|)(4xz - y^2) / 4x^2|bp| \end{cases} \quad (23)$$

以 $\pi \omega_0^2/\lambda$ 为变量的一元二次方程判别式为

$$\Lambda(W) = \left[T_r \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) \right]^2 - 4 \det \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) = \left(\frac{4xz - y^2}{4x^2b^2p^2} \right) [(a^2|C_4p| - |C_1b|)^2 + 4b^2p^2] \quad (24)$$

非轴对称光腔的稳定条件由下式给出

$$\begin{cases} 4xz - y^2 > 0 \\ T_r \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda} \right) > \sqrt{\Delta(W)}, \text{ 即 } a^2 |C_1 C_4 / bp| > 1 \end{cases} \quad (25)$$

当 $4xz - y^2 < 0$ 时为非稳定腔; 当两式都成立时, $\pi\omega_0^2/\lambda$ 的两个解均大于 0, 为稳定腔; 当(25)式成立而(26)式不成立时 $\pi\omega_0^2/\lambda$ 的一个解小于 0, 因此是稳定—非稳定腔。

对于 $l(+)$ 、 $l(-)$ 及其对角化角度 α , 可用与(22)式类似的方程求出, 但是使用的有关量为

$$T_r(L) = (m/b + n/p) - (C_4/b + C_1/p)ay/2x \quad (27)$$

$$\det(L) = mn/bp - ay(C_4n + C_1m)/2xbp + (a^2C_1C_4 - bp)y^2/4x^2bp \quad (28)$$

$$\Delta(L) = [T_r(L)]^2 - 4\det(L) = [(m/b - n/p) - (ay/2x)(C_4/b - C_1/p)]^2 + y^2/x^2 > 0 \quad (29)$$

因此, 当 $\Delta(L) = 0$ 时, $l(+)=l(-)$; 当 $\Delta(L) \neq 0$ 时, $l(+)$ 与 $l(-)$ 为不相等的实数解。

对于所得到的上述参数, 可作以下的解释: $\pi\omega_0^2(+)/\lambda$ 与 $\pi\omega_0^2(-)/\lambda$ 分别是非轴对称光腔基横模椭圆高斯光束在 β 角所确定的两个相互垂直平面(通过传输方向 z 轴)上的共焦参数, 即 $\omega_0(+)$ 与 $\omega_0(-)$ 是相应的光腰(光斑椭圆主轴长度的极小值); 而 $l(+)$ 与 $l(-)$ 分别是上述两个光腰在 α 角规定的两个相互垂直平面(通过传输方向 z 轴)内距离参考平面的位置, 描述非轴对称光腔基横模椭圆高斯光束的六个参数, 可从上述公式由计算机进行数值计算获得。

若所研究的光腔具有 $C_2 = C_3$ 的性质, 则

$$b = p = aC_2 \quad (30)$$

对于 $D = D'$ 和 $A = A'$ 的谐振腔, 有

$$m = n \quad (31)$$

对于 A, B, C, D 均为 2×2 对角矩阵的谐振腔, 则有

$$a = b = p = m = n = 0 \quad (32)$$

仅 C 为对角矩阵的光腔

$$b = p = 0 \quad (33)$$

而仅 A 与 D 为对角矩阵的光腔

$$m = n = 0 \quad (34)$$

在上述有关的情况下, 方程可能简化, 也可能失效(出现零作除数)。

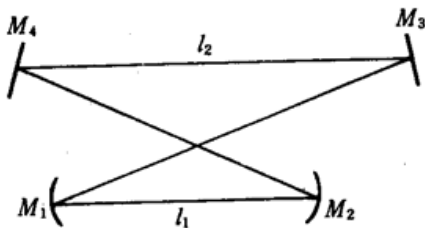


Fig. 1 Axially-asymmetric optical resonator

3 数值计算结果与结论

使用计算机对图 1 所示的非轴对称光腔(AAOR)进行了计算。 M_1 与 M_2 为非轴对称反射镜, 其矩阵元 $R_i (i=1, 2)$ 由 $(r_{ix}, r_{iy}, \beta_i)$ 表示, M_3 与 M_4 为平面反射镜, l_1 与 l_2 为像散介质, 其矩阵元 $L_j (j=1, 2)$ 由 $(l_{jx}, l_{jy}, \alpha_j)$ 表示^[2]。改变上述参数, 即可研究光腔模式参数的变化。为提高计算精度, 程序中采用了双精度的表示方法。

为避免某些场合下中间变量 (a, b, m, n, p) 过小 ($\sim 10^{-6}$) 而产生的计算精度下降, 将上述 5 个变量扩大 10^6 倍。这一作法并不影响计算的最后结果。根据计算

的分析,有以下结论:

1. 上面所得到的公式不适用于轴对称光腔以及 $C = C'$ 的非轴对称光腔,在这两种情况下出现除数为零的情况,使计算机停止运算。显然,代数求解方法的原理是正确的,只不过在这两种情况下的有关公式需要重新推导。

2. 在矩阵方法的计算机求解中,由于平方根符号的选取,一般存在多解^[4],需要根据物理概念及数据的合理性作出选择,才能得到唯一的正确解答。对于代数方法,首先根据 Q 参数实部与虚部的意义以及 Q 矩阵对角化后两个主轴的互换性,令 Q_2 的虚部为正,避免了符号的选取,其次 $\pi\omega_0^2/\lambda$ 方程有实数解的判别式与稳定性条件也是一致的,而 l 有实数解的条件也是自动满足的。因此,在限定 $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ 的条件下,代数方法只能求出一组唯一正确的解,从而不存在合理解的选取问题。计算例的稳定性符合(25)式及(26)式所要求的条件。

3. 为了简单起见,计算中仅变化一个参数(例如 r_{1z} 或 L_{1z}),在其相应的稳定区域内, $\pi\omega_0^2(\pm)/\lambda$ 以及 $l(\pm)$ 均呈现起伏的变化;在稳定区边缘不出现 $\pi\omega_0^2(\pm)/\lambda \rightarrow 0$ 的情况, $l(+)$ 与 $l(-)$ 也不一定同符号,这些都是与轴对称腔明显不同的结论。

4. 代数方法不仅可用于 $B \neq B'$ 及 $C \neq C'$ 的多元件复杂非轴对称腔,而且可用于在腔镜处满足 $B = B'$ 或 $C = C'$ 的条件的简单非轴对称腔腔内光束参数的求解(腔内不满足 $B = B'$ 的条件)。

作者感谢凌雯所作的编程及计算的工作。

参 考 文 献

- 1 林 强 *et al.*, 光学学报, 8(7), 658(1988)
- 2 林 强 *et al.*, 中国激光, 17(2), 150(1990)
- 3 卢亚雄, *Chinese Journal of Lasers (E. E.)*, 1, 117(1992)
- 4 吕百达 *et al.*, 四川大学学报(自然科学版), 28, 302(1991)