

二维摇摆场自由电子激光的谐波特性研究

彭良福 杨中海 刘盛纲

(电子科技大学高能电子学研究所, 成都 610054)

提要 本文应用 Madey 定理对二维摇摆场自由电子激光的谐波特性进行了研究。导出了这种新型摇摆场结构自由电子激光高次谐波的自发辐射功率密度和小信号增益公式。以及电子与辐射场的耦合系数的表达式。计算结果表明,采用二维摇摆场可以增强电子与辐射场之间的耦合,提高谐波的辐射强度和增益。而且在某些条件下,在轴上既可获得奇次谐波又可获得偶次谐波。

关键词 自由电子激光,二维摇摆场,谐波

Research of harmonic property in a two-dimensional undulator free-electron laser

Peng Liangfu, Yang Zhonghai Liu Shenggang

(Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract We analyzed the harmonic property of the two-dimensional undulator FEL by using Madey's theorem. We have derived the formulas of harmonic spontaneous emission power density, small signal gain of this undulator FEL and the coupling coefficients between the electrons and the radiation field. From the numerical calculation results we came to the conclusions that by utilizing the two-dimensional undulator, we can enhance the coupling between the electrons and the radiation field, and hence increase the harmonic spontaneous emission power density and gain. Furthermore, under certain conditions we can not only obtain odd but also even harmonic radiations on the axis.

Key words FEL, two-dimensional undulator, harmonic

1 引言

激光输出向短波长方向发展是目前自由电子激光研究领域的前沿课题。采用自由电子激光的高次谐波输出则是获得短波长激光输出的方法之一。理论和实验研究均已证明了这种方法的可行性^[1~4]。但这些研究都是针对一维摇摆场(Planar Undulator)自由电子激光进行的。

本文利用 Madey 定理,对采用新型二维摇摆场结构的自由电子激光的谐波特性作了研究。从理论上证明为了获得高次谐波输出,采用二维摇摆场比采用一维摇摆场更具优越性。

2 理论分析

两维摇摆场是 A. A. Varfolomeev 和 M. M. Pitatelev 最近提出的一种新型磁场结构^[5]。它的结构如图 1 所示。其旁轴区域的磁场可近似表示为

$$\mathbf{B}_w = B_{x_0} \sin k_x z \hat{x} + B_{y_0} \sin k_y z \hat{y} \quad (1)$$

式中 B_{x_0} 、 B_{y_0} 分别为 x 、 y 方向的磁场强度, $k_{x,y} = 2\pi/\lambda_{x,y}$, $\lambda_{x,y}$ 分别为 x 、 y 方向磁场的周期长度。相应的辐射电、磁场分别为

$$\mathbf{E}_s = E_{y_0} \cos \psi_2 \hat{x} - E_{x_0} \cos \psi_1 \hat{y} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_s = B_{x_0} \cos \psi_1 \hat{x} + B_{y_0} \cos \psi_2 \hat{y} \quad (3)$$

式中 $\psi_1 = f\omega_s t - f k_x z + \phi_1$, $\psi_2 = f\omega_s t - f k_y z + \phi_2$, f 为谐波次数, ω_s 、 k_s 分别为基波频率和波数, $\phi_{1,2}$ 为初位相。

以下的分析我们采用单粒子理论并假设入射电子束为无能散的理想电子束。因此本文的结果适用于能提供高能量、高质量电子束的贮存环 Compton 型自由电子激光器。

略去辐射电、磁场对电子运动的影响, 假定 γ 为常数在理想注入的条件下积分 Lorentz 方程得

$$v_x = - (cK_x/\gamma) \cos k_x z \quad (4a)$$

$$v_y = (cK_y/\gamma) \cos k_y z \quad (4b)$$

式中 $K_x = (eB_{x_0})/(mc^2 k_x)$, $K_y = (eB_{y_0})/(mc^2 k_y)$ 分别为 x 、 y 方向摇摆磁场的偏离系数。假设 $\gamma \gg 1$, 由 $\beta_z^2 = \beta^2 - (\beta_x^2 + \beta_y^2)$ 得

$$v_z \approx c \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 \cos 2k_x z + K_y^2 \cos 2k_y z) \right] \quad (5)$$

将(5)式代入 $t = \int_0^z \frac{dz}{v_z}$ 得

$$t \approx \frac{1}{c} \left[1 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) \right] z + \frac{1}{8\gamma^2 c} \left(\frac{K_x^2}{k_x} \sin 2k_x z + \frac{K_y^2}{k_y} \sin 2k_y z \right) \quad (6)$$

为了便于计算且不失一般性, 我们假定 $k_y = nk_x$ (n 为整数)。即两维摇摆场 x 方向磁场的周期长度是 y 方向磁场周期长度的整数倍。我们知道, 在与 z 轴成 θ 角度的方向上观测到的辐射频率主要集中于^[6]: $\omega = f\omega_s = (f\omega_s)/(1 - \beta_z \cos \theta)$, 当 $\theta = 0$ 时, $\omega_s = \omega_s/(1 - \beta_z)$ 。利用(5)式可得

$$\omega = f\omega_s \approx \frac{f\omega_s 2\gamma^2}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \quad (7a)$$

由于 $k_y = nk_x$, 故上式也可写为 $\omega \approx \frac{(f/n)\omega_s 2\gamma^2}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2}$ (7b)

式(7a)、(7b)即为谐振条件。利用谐振条件将(6)式代入 $\omega t - k_x z$ 得

$$\omega t - k_x z = \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) k_x z + \theta_x \sin 2k_x z + \frac{1}{n} \theta_y \sin 2k_y z \quad (8)$$

其中 $\theta_x = \frac{K_x^2}{4[1 + (K_x^2 + K_y^2)/2]}$, $\theta_y = \frac{K_y^2}{4[1 + (K_x^2 + K_y^2)/2]}$

下面我们利用 Madey 定理^[7,8]来导出两维摇摆场自由电子激光谐波的自发辐射功率密度和增益的表达式, 为此先求出电子能量的一阶扰动量 γ_1 , 它满足

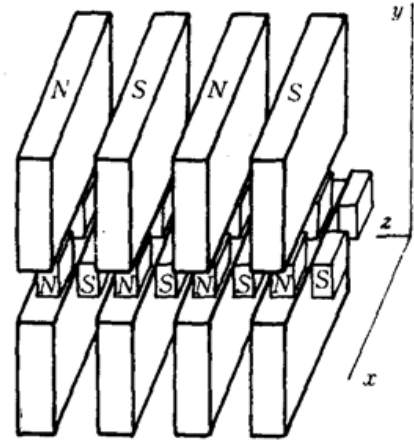


Fig. 1 Structural schematic of the two-dimensional undulator

$$\gamma_1 = -\frac{e}{mc^2 v_{z0}} \int_0^L E_x \cdot v dz \quad (9)$$

式中 L 为相互作用长度, 即 $L = N\lambda_z = Nn\lambda_y$, N 为摇摆磁场的周期数。将式(2)、(4a)、(4b) 代入上式并利用式(8), 经过复杂的运算后可得:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -\frac{e}{2mcv_{z0}\gamma} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left\{ E_{xz} K_x (-1)^p J_q \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) [J_p(f\theta_z) \right. \\ & - J_{p+1}(f\theta_z)] \cdot \frac{\sin(\Delta k_1 L + \phi_1) - \sin\phi_1}{\Delta k_1} + E_{yz} K_y (-1)^q J_q(f\theta_z) \left[J_q \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) \right. \\ & \left. - J_{q+1} \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) \right] \cdot \frac{\sin(\Delta k_2 L + \phi_2) - \sin\phi_2}{\Delta k_2} \left. \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

式中 $J_{p,q}$ 为第一类 p, q 阶 Bessel 函数,

$$\Delta k_1 = \frac{f}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) k_x - (2p - 2nq + 1) k_x \quad (11a)$$

$$\Delta k_2 = \frac{f}{2\gamma^2 n} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) k_x - \left(2q - \frac{2p}{n} + 1 \right) k_y \quad (11b)$$

将(10)式平方后对 ϕ_1, ϕ_2 取平均并利用谐振条件可得

$$\langle \gamma_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{eL}{2mcv_{z0}\gamma} \right)^2 \cdot \left[E_{xz}^2 \cdot F_x^2 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_1}{2} L \right) + E_{yz}^2 \cdot F_y^2 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_2}{2} L \right) \right] \quad (12)$$

其中 $\langle \rangle$ 代表平均值, $\text{sinc}(x) = \sin x/x$,

$$F_x = K_x \cdot \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (-1)^{q+(j-1)/2} J_q \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) [J_{q+(j-1)/2}(f\theta_z) - J_{q+(j+1)/2}(f\theta_z)] \quad (13a)$$

式中 f 满足 $f = 2(p - qn) + 1$, (p, q, n 均为整数)

$$F_y = K_y \cdot \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (-1)^{(1/n)(p+f/2)-1/2} J_q(f\theta_z) \left[J_{1/n(p+f/2)-1/2} \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) - J_{1/n(p+f/2)+1/2} \left(\frac{f}{n} \theta_y \right) \right] \quad (13b)$$

式中 f 满足 $f = 2(qn - p) + n$ (p, q, n 均为整数)。令 $F_1 = F_x^2, F_2 = F_y^2$, 则 F_1, F_2 即为两维摇摆场情况下电子与辐射场之间的耦合系数。

由 Medey 定理可知, 电子在单位立体角单位频率间隔内辐射的能量为

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{m^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 E_x^2} \langle \gamma_1^2 \rangle \quad (14)$$

将(12)式代入上式得

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_f = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{eLk_x}{8\pi\beta_{z0}\gamma} \right)^2 \cdot f^2 \left[F_1 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_1}{2} L \right) + F_2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_2}{2} L \right) \right] \quad (15)$$

式(15)即为 f 次谐波在轴上(观测角 $\theta = 0$) 的自发辐射功率密度表达式。对于 $\theta \neq 0$ 的情况我们将在另文予以讨论。从 Medey 定理我们还知道, 自由电子激光的小信号增益

$$G = -\frac{mc^2(I/e)}{1/2\epsilon_0 E_x^2 c A} \langle \gamma_2 \rangle \quad (16)$$

式中 A 为光波的面积, I 为电子束电流, $\langle \gamma_2 \rangle$ 为电子能量的二阶扰动量, 且满足

$$\langle \gamma_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma} \langle \gamma_1^2 \rangle \quad (17)$$

利用(11a)、(11b) 两式, 将(12)式代入(17)式得

$$\begin{aligned} \langle \gamma_2 \rangle = & -\frac{1}{4} \left(\frac{eL}{2mcv_{z0}\gamma} \right)^2 \frac{k_x L}{\gamma^3} \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) \\ & \times \left(E_{xz}^2 \cdot f \cdot F_1 \frac{d\text{sinc}^2 \xi}{d\xi} \Big|_{\xi=(\Delta k_1/2)L} + E_{yz}^2 \cdot \frac{f}{n} \cdot F_2 \frac{d\text{sinc}^2 \xi}{d\xi} \Big|_{\xi=(\Delta k_2/2)L} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

将(18)式代入(16)式, 便得 f 次谐波的增益表达式。

3 计算结果和讨论

由(15)、(18)式可知, 电子与辐射场的耦合系数 F_1, F_2 的大小表征了谐波自发辐射功率密度和增益的大小。因此, 我们只需讨论耦合系数随参数 K_x, K_y, n 的变化便可得知二维摇摆场自由电子激光的谐波特性。

(1) 当 $B_{y0} = 0$ 时, 即仅存在一维摇摆场。此时 $K_y = 0$, 由公式(13a)、(13b)可知在这种情况下 $F_2 = 0, F_1 = K_x^2 [J_{(f-1)/2}(f\theta_x) - J_{(f+1)/2}(f\theta_x)]^2$, F_1 即为一维摇摆场情况下的耦合系数。此结果与参考文献[1~3, 8]中一维摇摆场的结果相同。若令 $n = 2, f = 1$, 则公式(13a)、(13b)分别简化为参考文献[5]中的(3)、(4)式。

(2) 我们对 $n = 1, K_x = 1$ 时 F_1 随 K_y 变化的情况和 $n = 1, K_y = 1$ 时 F_2 随 K_x 变化的情况分别进行了计算, 计算结果如表 1、表 2 所示。从表 1、2 可知, 改变 K_y 对耦合系数 F_1 的影响很小; 改变 K_x 对耦合系数 F_2 的影响很小。若将二维摇摆场视为 x, y 方向两个一维摇摆场的叠加, 则这个结果是容易理解的。当然, 二维摇摆场自由电子激光的谐波特性并非 x, y 方向两个一维摇摆场谐波特性的简单相加(一维摇摆场情况下 K_y 与 F_1 无关, K_x 与 F_2 无关)。

Table 1 Change of F_1 with K_y , when $n = 1, K_x = 1$

Harmonic order f	Change range of K_y	K_y	Maximum absolute Change value of F_1 max $ \Delta F_1 $
1	1~10	1	8.21×10^{-1}
3	1~10	1	1.15×10^{-1}
5	1~10	1	5.47×10^{-2}

Table 2 Change of F_2 with K_x , when $n = 1, K_y = 1$

Harmonic order f	Change range of K_x	K_x	Maximum absolute Change value of F_2 max $ \Delta F_2 $
1	1~10	1	8.21×10^{-1}
3	1~10	1	1.15×10^{-1}
5	1~10	1	5.47×10^{-2}

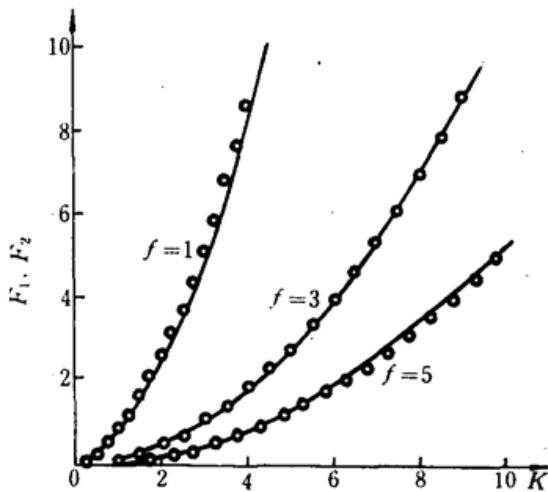


Fig. 2 When $n = 1, K_x = K_y = K$, the curve of coupling coefficients F_1, F_2 ($F_1 = F_2$) versus K value ('+' represent the coupling coefficient F_{1D} versus K value in the case of one-dimensional undulator)

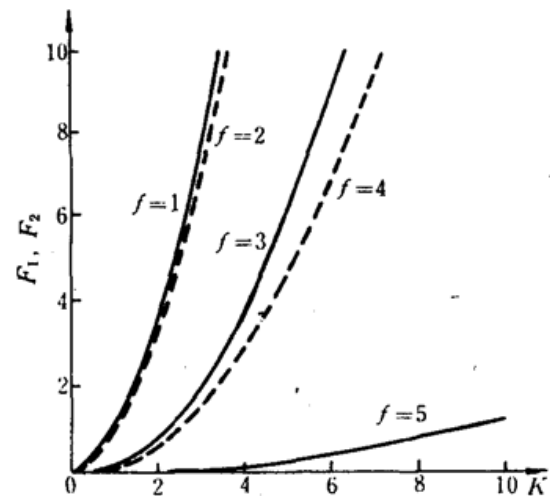


Fig. 3 When $n = 2, K_x = K_y = K$, the curve of coupling coefficients F_1, F_2 versus K value (solid lines represent the coupling coefficient F_1 ; dotted lines represent the coupling coefficient F_2)

(3) 由讨论(2)可知,在 $K_x = K_y = K$ 和 $K_x \neq K_y$ 两种情况下,耦合系数 F_1, F_2 随 n 的变化情况基本上是一致的。下面我们只对 $K_x = K_y = K$ 情况下各次谐波的耦合系数 F_1, F_2 随 n 变化进行计算,计算结果如图 2~4 所示。

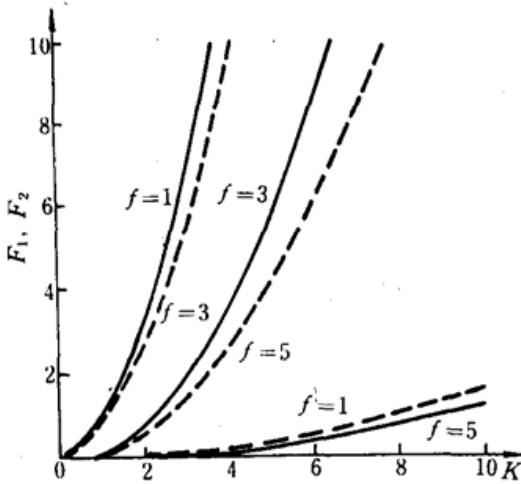


Fig. 4 When $n = 3$, $K_x = K_y = K$, the curve of coupling coefficients F_1, F_2 versus K value (solid lines represent the coupling coefficient F_1 ; dotted lines represent the coupling coefficient F_2)

图 2~4 表明,不论 n 取奇数还是偶数仅有奇次谐波的耦合系数 $F_1 \neq 0$ 。这从式(13a)中 $f = 2(p - qn) + 1$ (p, q, n 均为整数)也可看出。另外,当 n 为奇数时仅有奇次谐波的耦合系数 $F_2 \neq 0$; 当 n 为偶数时仅有偶次谐波的耦合系数 $F_2 \neq 0$ 。这从式(13b)中 $f = 2(qn - p) + n$ (p, q, n 均为整数)也可看出。因此,采用 n ($n = k_x/k_z$) 为偶数的二维摇摆磁场可以在轴上同时获得奇次和偶次谐波^[5]。同时我们还可看到 n 取几则第几次谐波的耦合系数较大。因此,若想获得第 f 次谐波,则应采用 n 等于 f 的两维摇摆磁场较好。这个结论从采用组合型 Wiggler 选择谐波的观点来看是不难理解的^[9]。

(4) 图 2~4 并结合公式(13a)、(13b) 我们还可知,不论 n 取奇数还是偶数均有 $F_{2D} > F_{1D}$ (F_{2D}, F_{1D} 分别为二维和一维摇摆场情况时的耦合系数, $F_{2D} = F_1 + F_2$)。这是因为在一维摇摆场中,电子仅在一个横向方向有振荡,该振荡使电子在纵向产生振荡。正是电子的这种纵向振荡导致了自由电子激光的谐波产生^[1,2]。而在二维摇摆场中电子在 x, y 方向均有横向振荡。两个方向的横向振荡均对电子的纵向振荡有贡献,因而 $F_{2D} > F_{1D}$, 相应所产生的谐波也要强些。从图 2 和式(13a)、(13b) 可知,当 $n = 1, K_x = K_y$ 时(即二维摇摆场 x, y 方向磁场的周期长度和磁场强度均相等时) $F_1 = F_2 \approx F_{1D}$, 因此 $F_{2D} \approx 2F_{1D}$ 。也即采用 x, y 方向磁场强度和周期长度均相等的二维摇摆磁场,可使电子与辐射场之间的耦合系数比采用一维摇摆场时增加约一倍。

参 考 文 献

- 1 W. B. Colson, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-17**, 1417(1981)
- 2 M. J. Schmitt, C. J. Elliott, *Phys. Rev.*, **A41**, 3853(1990)
- 3 傅恩生,王之江, *中国激光*, **15**(5), 257(1987)
- 4 B. Girard, Y. Lapierre et al., *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 2405(1984)
- 5 A. A. Varfolomeev, M. M. Pitatlev, *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, **A304**, 507(1991)
- 6 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York 1975, 671
- 7 J. M. J. Madey, *Nuovo Cimento*, **50B**, 64(1979)
- 8 L. K. Grover, R. H. Pantell, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-21**, 944(1985)
- 9 R. W. Warren, N. Piovelia, *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, **A304**, 696(1991)