

考虑记录介质与周围的介电常数不同的情况下 导出体全息图的衍射效率

姜铃珍 赵 峰 李成江 邹立勋 耿完楨 洪 晶

(哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150006)

Diffraction efficiency of volume hologram derived with the index of recording material different from that of the surrounding

Jiang Lingzhen, Zhao Feng, Li Chengjiang, Zou Lixun, Geng Wanzen, Hong Jing

(Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006)

Abstract The general formula of the diffraction efficiency of volume holograms has been derived at the condition that the index of recording materials from that of the surroundings. It is found that this formula is more suitable compared with that of the Kogelnik's in practice.

Key words volume holograms, diffraction efficiency

1 引 言

Kogelnik 在 1969 年给出了求体光栅衍射效率的耦合波方程^[1],为使问题简化,他假设介质内外的折射率相等,且都等于介质的折射率。这样通过耦合波方程解出的信号光的振幅 S 在介质内外一样,倾斜因子 C_r, C_s 在介质内外一样,从而简化了方程的解。

但在实际的实验中记录介质的介电常数与周围的介电常数并不相同,介质的介电常数为 ϵ_r ,而周围通常是空气,其介电常数 $\epsilon_0 = 1$,因此照明光在介质的边界要折射,介质内外的振幅值也不相同,衍射光的振幅在介质内外也不相同,在实验中测量照明光强、衍射光强都是在空气中进行的,所以测得的衍射效率与理论值有偏差。本文算出了这个偏差,并进行了分析。

2 原 理

在垂直入射面内接近布拉格方向波长为 λ 的一单色光在 $z = 0$ 处照明体全息图,如图 1 所示。在体光栅内仅有两束光,一束是照明光 R ,另一束是信号光 S ,其它偏离布拉格条件的光忽略。在记录介质中,设 K 是光栅波矢则光栅的

$$\text{介电常数: } \epsilon_r = \epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad (1)$$

$$\text{电导率: } \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad (2)$$

用波动方程描写波的传播:

$$\Delta^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$k^2 = (\omega^2/c^2) \epsilon_r - j\omega\mu\sigma \quad (4)$$

$$\text{令 } E = R(z)e^{-j\sigma \cdot r} + S(z)e^{-j\rho \cdot r} \quad (5)$$

ρ 是照明光波矢, $R(z)$ 是照明光振幅。 σ 是信号光波矢, $S(z)$ 是信号光振幅。当满足布拉格条件时(即 $\cos(\phi - \theta) = K/2\beta$), 波矢量如有如下关系 $\sigma = \rho - \mathbf{K}^{[2]}$ 。将(5)式代入(3)式略去高阶模和二阶微商项(因为考虑慢变化), 经整理得出耦合波方程:

$$\begin{cases} \frac{\rho_z}{\beta} \frac{dR}{dx} + \alpha R + j\kappa S = 0 & (6) \\ \frac{\sigma_z}{\beta} \frac{dS}{dx} + \left[\alpha + j \left(\frac{\beta^2 - \sigma^2}{2\beta} \right) \right] S + j\kappa R = 0 & (7) \end{cases}$$

式中 κ 为耦合系数, $\rho_z/\beta = C_R$, $\sigma_z/\beta = C_S$ 分别为照明光与信号光的倾斜因子。解耦合波方程(6), (7) 得出 S , 考虑照明光的复振幅归一化, 据衍射效率定义有

$$\eta = (|C_S|/C_R) S S^* \quad (8)$$

上述公式完全是在介质内部解出的, 也适用于周围的介电常数与介质的介电常数相同的情况。 $C_R = \cos\theta$, θ 角是记录时参考光束与 z 轴夹角, $C_S = \cos(\theta_0 - 2\phi)$, θ_0 是记录时物光束与 z 轴夹角, ϕ 角是光栅波矢与 z 轴夹角。

2.1 对非倾斜光栅

由于是非倾斜光栅, 所以 $\phi = 90^\circ$, $C_S = \cos\theta_0$, 又 $\theta = \theta_0$, (8) 式变为 $\eta = S S^*$ 。考虑到介质内外的折射率不同, 据菲涅耳公式, 在 $z = 0$ 处, 如图 2 所示有

$$R = \frac{2n_1 \cos\theta'}{n_1 \cos\theta' + n \cos\theta} R' \quad (9)$$

R 归一化, 所以 $R = 1$, $n_1 = 1$ 。因为 $n_1 \sin\theta' = n \sin\theta$, 所以有

$$\cos\theta = \sqrt{1 - (\sin^2\theta/n^2)} \quad (10)$$

$$R' = \frac{1 + n(\cos\theta/\cos\theta')}{2} \quad (11)$$

(11) 式中的 θ' 可以测得。

在 $z = d$ 的界面上, 信号波振幅因子据菲涅耳公式有

$$S' = \frac{2n \cos\theta_i}{n \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} S$$

上式中的 $\cos\theta_i = \cos\theta$, 在布拉格再现情况下 $\theta_i = \theta'$, 则

$$S' = \frac{2n}{n + (\cos\theta'/\cos\theta)} S \quad (12)$$

据衍射效率的定义有

$$\eta' = \frac{S' S'^*}{R' R'^*} = \left[\frac{4n}{2n + (\cos\theta'/\cos\theta) + n^2(\cos\theta/\cos\theta')} \right]^2 \eta \quad (13)$$

式中 η' 是考虑了介质内外折射率不同的光栅衍射效率, 它可由实验测得。 η 是介质外等于介

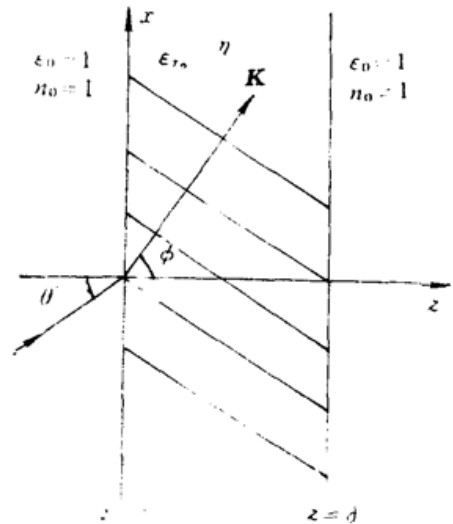


Fig. 1

质内的折射率时光栅的衍射效率。

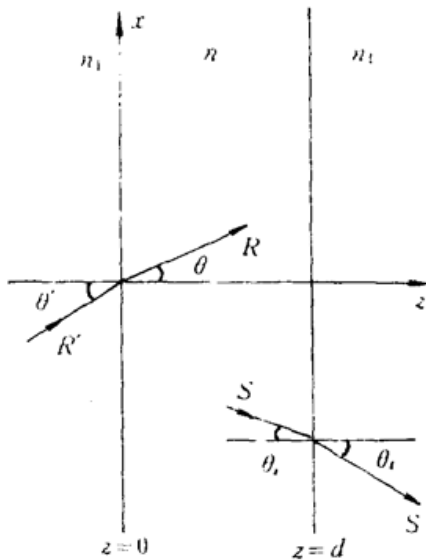


Fig. 2

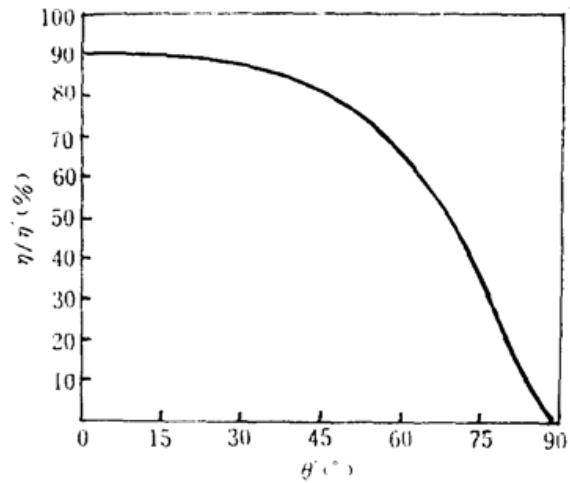


Fig. 3

我们给出了 η'/η 与 θ' 角的关系曲线于图 3, 这里 θ' 是制作光栅时参考光波与 z 轴夹角, 因为是非倾斜光栅, 所以物光与 z 轴夹角也是 θ' , 这里取波长 $\lambda = 514.5 \text{ nm}$, 介质的折射率取 $n = 1.54$ 。

从曲线可以看出 η' 是小于 η 的。还可看出当 θ' 角在 30° 以内时, η' 与 η 有较好的近似, 在 $\theta' > 30^{\circ}$ 时 η' 与 η 偏离较大, 所以实验中若想应用 Kogelnik 理论, 应取小于 30° 的入射角记录光栅。

2.2 对倾斜光栅

如图 4 所示, 对倾斜光栅仍可由 (8) 式出发计算衍射效率:

$$\eta = (|C_S|/C_R)SS^*$$

但是由于有倾斜因子, 需对 (13) 式进行修正, $C_S = -\cos(\theta - 2\phi)$, ϕ 是倾斜角, $C_R = \cos\theta$, 由图 4 可以看出 $\phi = 90^{\circ} + \alpha$, $\alpha = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) - \theta_0$ 。考虑介质内外折射率不同时 $n_1 \sin\theta' = n \sin\theta$, 所以 $\theta = \arcsin(\sin\theta'/n)$, $n_1 \sin\theta_0' = n \sin\theta_0$, 所以 $\theta_0 = \arcsin(\sin\theta_0'/n)$, 式中 θ' 是记录时参考光与 z 轴夹角, 可测得。 θ_0' 是记录时物光与 z 轴夹角, 可测得。所以,

$$C_S' = \cos\theta_0' = \cos[\arcsin(\sin\theta_0'/n)] \quad (14)$$

$$C_R' = \cos[\arcsin(\sin\theta'/n)] \quad (15)$$

在 Kogelnik 理论中因为 $n_1 = n$, 所以 $\theta_0 = \theta_0'$, $\theta = \theta'$, 所以参考光、物光在 $z = 0$ 界面上不发生折射, 而对于 $n_1 \neq n$ 时, 入射光在界面上将发生折射, C_S 值由 (14) 式 C_S' 代替, C_R 值由 (15) 式 C_R' 代替, (13) 式应变为

$$\eta' = \frac{C_S' C_R}{C_R' C_S} \left\{ \frac{4n}{(n + \cos\theta_0'/\cos\theta_0)[1 + n(\sin\theta/\cos\theta')]} \right\}^2 \cdot \eta \quad (16)$$

改变记录时物光与 z 轴夹角 θ_0' , 参考光与 z 轴夹角不变, 则倾斜因子 C_S'/C_R' 随着 θ_0' 变因子 η' 变化。图 5 示出 η'/η 随 θ_0' 变化的曲线, $\theta' = 10^{\circ}$, 对应 $\lambda = 514.5 \text{ nm}$, $n = 1.54$ 。

由图 5 看出 η' 小于 η , 且在小于 30° 角范围内 $\eta' = \eta$, 在大于 30° 角范围内, η' 比 η 小得多, 曲线下降比外倾斜光栅曲线 4 下降来得快。

由以上的分析可知, 当记录光栅时, 若入射角较大, 使用 Kogelnik 的衍射效率公式会带来较大误差, 可用本文给出的衍射效率公式 (13) 和 (16)。由于实验工作者在记录体全息图时, 一

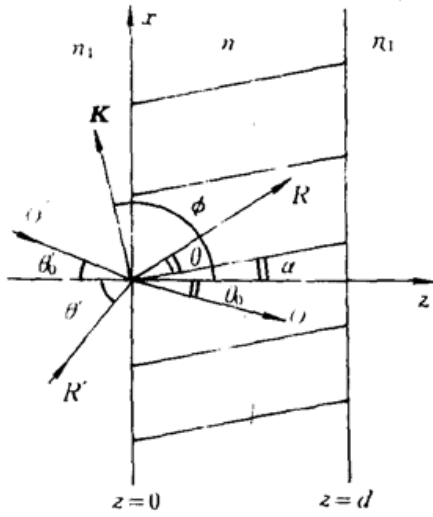


Fig. 4

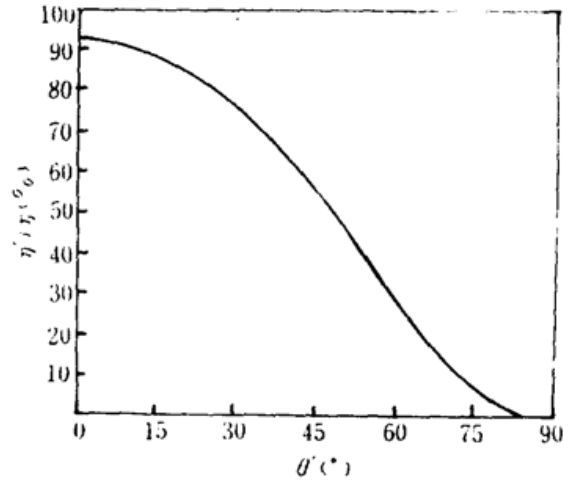


Fig. 5

般说来参考光、物光分别与 z 轴夹角选取的都较小,因此得出的结果与 Kogelnik 的理论值符合得较好。

参 考 文 献

1 Herwig Kogelnik, *Bell. Tech. J.*, **48**(9), 2909(1969)

(收稿日期: 1992 年 7 月 8 日)