第20卷 第2期
1993年2月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A20, No. 2
February, 1993

多光子 Jaynes-Cummings 模型中原子反转的崩溃和再生效应*

周 鹏**
(激光技术国家重点实验室，武汉 430074； 湖北教育学院物理系，武汉 430060)

提要 本文应用比较简单的方法精确求解了多光子 Jaynes-Cummings 模型的原子反转算符的一般解和近似分析了原子反转的崩溃和再生行为，并给出崩溃和再生时间。

关键词 多光子 Jaynes-Cummings 模型，崩溃和再生效应

Collapse and revival effect of atomic inversion in the multiphoton Jaynes-Cummings model

Zhou Peng
(National Laboratory of Laser Technology, Wuhan 430074;
Department of Physics, Hubei College of Education, Wuhan 430060)

Abstract The general time-dependent atomic inversion operator in the multiphoton Jaynes-Cummings model has been exactly solved, its collapse and revival behavior has been approximately analyised, and the collapse and revival times have been obtained by means of some simple techniqes.

Key words Jaynes-Cummings model, collapse and revival effect

众所周知，描述一个二能级原子与单模量子场的单光子相互作用的 Jaynes-Cummings 模型[1]是精确可解的。这模型展示许多有意义的量子效应，如原子反转的崩溃和再生[2]、真空场的 Rabi 振荡[3]、原子偶极压缩[4]、辐射场的非经典性[5]等。最近，Rempe 等人在实验上成功地获得了这一模型，并观测到了原子反转的量子崩溃和再生现象[6]。这使得人们对 Jaynes-Cummings 模型的研究不再只具有学术意义，而且具有实际价值。

收稿日期：1991年3月4日；收到修改稿日期：1991年5月17日。
*国家自然科学基金资助项目； **中国高等科技中心(世界实验室)，北京。

另一方面，近年来人们对此模型所作的最重要的推广之一是将原子与场的单光子相互作用推广到多光子相互作用[7]，也可精确求解[8]。其原子反转的时间演化同样揭示了崩溃—再生效应[8,9]。

一般来说，人们在研究这些模型中反映原子动力学行为的原子反转时，通常先求解给定初始状态的 Schrödinger 方程[8]，或求出系统的时间演化算符的矩阵形式[9]，然后给出特定条件下原子反转的表达式。然而，对于一般初始条件，或考虑失谐量、原子相干性[10]等因素的影响时，这些求解过程在数学上则显得较为复杂。另一方面，其结果往往需借助于计算机或比较繁杂的鞍点近似法[9,11]分析才能展示其崩溃和再生行为。

本文使用比较简洁的方法给出了多光子 Jaynes-Cummings 模型的原子反转的一般变化规律，并近似分析了原子反转的崩溃—再生效应。

在旋波近似下，多光子 Jaynes-Cummings 模型的 Hamiltonian 可表示为[7,9]

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_z + \varepsilon(S_+ a^K + a^{+K} S_-) \qquad (\hbar = 1) \tag{1}$$

式中 a^+ 和 a 是频率为 ω 的辐射场的光子的产生和消灭算符，S_z 和 $S_\pm$ 是二能极原子的反转和跃迁算符，其跃迁频率为 ω_0，ε 是原子和辐射场的耦合常数，K 是原子每跃迁一次吸收或发射的光子数。显然，当 $K = 1$ 时，(1) 式过渡到标准的 Jaynes-Cummings 模型[1]。

为求解原子反转算符随时间变化的规律，我们分解(1)式

$$H = H_1 + H_2 \tag{2}$$

这里

$$\begin{aligned} H_1 &= \omega(a^+ a + K S_z) \\ H_2 &= (\omega_0 - K\omega) S_z + \varepsilon(S_+ a^K + a^{+K} S_-) \end{aligned} \tag{3}$$

它们是相互对易的。因此，在 Heisenberg 图像中

$$\begin{aligned} S_z(t) &= e^{iHt} S_z e^{-iHt} = e^{iH_2 t} S_z e^{-iH_2 t} \\ &= S_z + it[H_2, S_z] + \frac{(it)^2}{2!}[H_2, [H_2, S_z]] + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

再定义一反映系统激发总数的算符 N

$$N = a^+ a + K S_z + K/2 \tag{5}$$

借助于公式

$$\begin{aligned} &[S_z, S_\pm] = \pm S_\pm ; \qquad [S_+, S_-] = 2S_z \\ &[a, a^+] = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

不难发现 N 是运动常数，且

$$[N, (S_- a^{+K} \pm S_+ a^K)] = 0 \tag{7}$$

因此可得

$$\begin{aligned} &[H_2, S_z] = \varepsilon(S_- a^{+K} - S_+ a^K) \\ &[H_2, [H_2, S_z]] = \Omega^2 S_z - \delta H_2 \\ &[H_2, [H_2, [H_2, S_z]]] = \Omega^2 \varepsilon(S_- a^{+K} - S_+ a^K) \\ &[H_2, [H_2, [H, [H_2, S_z]]]] = \Omega^4 S_z - \Omega^2 \delta H_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\delta = \omega_0 - K\omega$ 是原子和辐射场的失谐量，

$$\Omega = \{4\varepsilon^2[N!/(N-K)!] + \delta^2\}^{1/2} \tag{9}$$

是反映 Rabi 振荡的频率算符。

将(8)式代入(4)式即可得原子反转算符的一般变化规律

$$
\begin{aligned}
S_z(t) &= S_z\cos\Omega t + (i\varepsilon/\Omega)(S_-a^{+K} - S_+a^K)\sin\Omega t \\
&\quad + (\delta/\Omega^2)[\delta S_z + \varepsilon(S_+a^K + a^{+K}S_-)](1-\cos\Omega t)
\end{aligned} \tag{10}
$$

这一结果允许我们讨论任何初始条件下，以及考虑到 δ、ε 等因素影响下的原子反转的时间演化规律。

如果假定 $t=0$ 时刻，原子处在基态 $|-\rangle$，而辐射场处在相干态 $|\alpha\rangle$，

$$
|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{11}
$$

这里 $|\alpha|^2=\bar{n}$ 是初始平均光子数，则在共振情况下($\delta=0$)很容易给出原子反转的时间演化：

$$
\langle S_z(t)\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\bar{n}}\frac{\bar{n}^n}{n!}\cos\left[2\sqrt{\frac{n!}{(n-K)!}}\varepsilon t\right] \tag{12}
$$

一般情况下，(12)式右边的无穷求和不能给出简单的数学表达式。如果假定 $\bar{n}\gg1$，$\bar{n}\gg K$，则可给出(12) 式的近似表达式。这是因为泊松分布具有平均光子数 $\bar{n}$，涨落为$(\Delta n)^2=\bar{n}$，在上述极限下，(12) 式的无穷求和中主要的贡献来源于 n 取 $\bar{n}-\sqrt{\bar{n}} < n \sim AKn - D]] + \sqrt{\bar{n}}$ 范围值的项。因此，可作近似

$$
\sqrt{\frac{n!}{(n-K)!}} \simeq n^{K/2} = \bar{n}^{K/2}\left(1+\frac{n-\bar{n}}{\bar{n}}\right)^{K/2} \simeq \bar{n}^{K/2}\left(1+\frac{K}{2}\frac{n-\bar{n}}{\bar{n}}\right) \tag{13}
$$

这样(12)式可近似表示成

$$
\langle S_z(t)\rangle \approx -\frac{1}{2}e^{-\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{n!}\cos[K\bar{n}^{(K-2)/2}n-(K-2)\bar{n}^{K/2}]\varepsilon t \doteq -\frac{1}{2}e^{-\phi(t)}\cos[\varphi(t)] \tag{14}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\phi(t) &= 2\bar{n}\sin^2\left(\frac{K}{2}\bar{n}^{(K-2)/2}\varepsilon t\right) \\
\varphi(t) &= \bar{n}\sin(K\bar{n}^{(K-2)/2}\varepsilon t) - (K-2)\bar{n}^{K/2}\varepsilon t
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

(14)式和(15)式已清楚地展示，当 $\bar{n}\gg1$ 和 $\bar{n}\gg K$ 时，原子反转呈现快速余弦振荡，同时又受包络函数 $e^{-\phi(t)}$ 的调制。其结果表现为崩溃和再生效应。其崩溃时间 T_C 和再生时间 T_R 则可由(15)式近似地给出

$$
\begin{aligned}
T_C &\approx \frac{1}{K\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\bar{n}^{K-1}}} \\
T_R &\approx \frac{2\pi}{K\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{\bar{n}^{K-2}}}
\end{aligned} \tag{16}
$$

值得指出的是，我们的结果与鞍点近似法分析[2,9,11]的主要结论一致，但我们的方法简单明了。作为定性分析，当 $K=1$ 时，(16) 式给出了标准 Jaynes-Cummings 模型的原子反转的崩溃时间 $T_C=\sqrt{2}/\varepsilon$，再生时间 $T_R=2\pi\sqrt{\bar{n}}/\varepsilon$，这表明崩溃时间相对初始辐射场的平均光子数 $\bar{n}$ 来说是常数，而再生时间则正比于 $\sqrt{\bar{n}}$，当 $\bar{n}\gg1$ 时，再生时间 $T_R\gg$ 崩溃时间 T_C。这与对(12) 式进行精确数值计算的结论是一致的[2]。当 $K=2$ 时，$T_C=1/\varepsilon\sqrt{2\bar{n}}$，$T_R=\pi/\varepsilon$。原子反转的崩溃时间随 $\bar{n}$ 的增大而变短，但再生时间保持不变，其结果使得原子反转呈现周期崩溃和再生，其周期为 π/ε[8]。当 $K\geqslant3$ 时，其原子反转的崩溃时间和再生时间都随着 $\bar{n}$ 的增大而变短，且 $\bar{n}\gg1$ 时，$T_C\ll T_R$。原子反转在呈现第一个崩溃和再生之后的时间演化行为变成无规则振荡[12]。

参 考 文 献

1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**, 89(1963)
2 N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon *et al.*, *Phys. Rev. A*, **23**, 236(1981)
3 G. S. Agarwal, *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 480(1985)
4 周 鹏，彭金生，中国激光，**19**, 580(1992)
5 P. Meystre, M. S. Żubairy, *Phys. Lett. A*, **89**, 390(1982)
6 G. Rempe, H. Walther *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 353(1987)
7 C. V. Sukumar, B. Buck, *Phys. Lett. A*, **83**, 211(1981)
8 周 鹏，彭金生，光学学报，**10**, 837(1990)
9 S. Singh, *Phys. Rev.*, **A25**, 3206(1982)
10 周 鹏，彭金生，*Phys. Rev. A*, **44**, 3331(1991)
11 H. I. Yoo, J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118**, 290(1985)
12 周 鹏，彭金生，*Physica A*, (1993, in press)

用于掺钕固体激光器的滤光玻璃通过鉴定

由中国科学院上海光机所研制的用于掺钕固体激光器的滤光玻璃于1992年12月25日通过了由中国科学院上海分院组织的技术鉴定。

这种沪光玻璃为掺杂稀土氧化物(CeO_2,Sm_2O_3,Eu_2O_3)的 Li_2O-MgO-Al_2O_3-SiO_2 系统，可以有效地滤除激光泵浦源中短于340 nm的紫外光谱成份以及1.06 μm附近的近红外光谱成份。这种玻璃还具有荧光转换功能，可将有害的紫外泵浦光转换成对 Nd^{3+} 泵浦有用的激发光，从而提高对激光器的泵浦效率。

这种玻璃物化性能良好。用离子交换法化学增强后，抗折强度和耐急冷急热强度分别提高1倍和2.5倍，使其能够应用于高平均功率固体激光系统；它还具有很强的抗水和抗硝酸盐浴侵蚀能力，使其在长时间离子交换处理条件下能保持良好的光学表面。

将这种玻璃加工成片状、圆管状及腔体状，已成功地应用于各种掺钕YAG激光器中。与通用的掺铈石英管及某些商品黄玻璃管相比，滤光玻璃具有明显的优点：在光泵输入能量很高时仍不出现YAG激光输出功率下降的趋势；在长期使用条件下未发现激光效率下降和激光工作物质中的光泵致色心现象；玻璃本身也未发生过炸裂问题。

鉴定委员会认为，这种玻璃的滤光性能和强度具有国内领先水平，达到了80年代末国际上的先进水平。它的研制成功，为我国固体激光器的发展起到了重要的推动作用。

（吉 禾）