

标准 Voigt 线型曲线族及其应用

徐慎初 邹玲枫 郭栋林 是

夏学江

(福建师范大学激光研究所, 福州 350007)

(清华大学现代应用物理系, 北京 100084)

提要 我们从标准 Voigt 线型曲线族看出 $\eta \leq 1.2$ 的曲线十分接近于 $\eta = 0$ 即均匀展宽的曲线。结合实验事实, 澄清了关于使增益介质均匀展宽占优势的概念, 并且详细推导了均匀展宽激光器自发产生单纵模运转的条件。

关键词 Voigt 线型, 均匀展宽, 单纵模运转

Family of standard Voigt profiles and its application

XU Shenchu, ZOU Lingfeng, GUO Dong, LIN Shi

(Laser Research Institute, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

XIA Xuejiang

(Department of Modern Applied Physics, Qinghua University, Beijing 100084)

Abstract It is found from the family of standard Voigt profiles that the curves of $\eta \leq 1.2$ are very close to the curve of $\eta = 0$ (homogeneously broadened). Combining with the experimental facts, the concept of making the gain medium predominantly homogeneously broadened is clarified and the conditions of single-longitudinal-mode operation without special optical mode-selection for homogeneously broadened lasers are deduced in details.

Key words Voigt profiles, homogeneously broadening, single-longitudinal-mode operation

1 引言

原子发光的洛仑兹线型(均匀展宽)和高斯线型(非均匀展宽)的卷积所产生的 Voigt 线型在光谱学和激光领域的理论和实验中具有重要的作用。但是, Voigt 积分不能被解析求解, 只能通过大量的数值计算用数表的形式来表示^[1,2]; 或者需假设相卷积的两线型函数的半值宽度差别很大, 使得其中一种线型可用狄拉克 δ 函数近似表示, 从而近似地用解析解出 Voigt 积分^[3]。

我们认为, Voigt 线型的重要性与它的不可精确解析表示之间的矛盾, 产生了以下几个问题: 1) 繁杂的数表对于对问题作定性分析和近似的准定量解析是不方便的; 2) 用狄拉克 δ 函

数方法近似解析表示 Voigt 积分失去一般性和普遍适用性; 3) 这也必然导致在激光光谱的理论中, 存在着没有一种理论模型能够对应于真实的激光谱线线型这样一个严重的缺点^[4]。

除了上述考虑之外, 促使我们重新研究 Voigt 线型的直接动机是试图说明在解释以下两个实验事实时, 尽管洛仑兹线宽并不大大于高斯线宽, 为什么可以按均匀展宽激光器的模式竞争来处理。这两个实验事实是: 1) 当气体激光器的增益介质的压力增大到使洛仑兹展宽与高斯展宽有差不多的大小时, 就能产生单纵模的激光输出^[5]; 2) 当洛仑兹展宽与高斯展宽近似相等时, 空心阴极氩镉激光器能够自发产生单纵模运转^[6,7]。

我们将标准 Voigt 线型的数表制成标准 Voigt 线型曲线族, 从中看出相应于洛仑兹展宽占优势即 $\eta \leq 1.2$ 的曲线(它们的洛仑兹展宽占 Voigt 宽度的 62% 以上)很接近于 $\eta = 0$ 即均匀展宽曲线, 从而说明了在上述两种实验中, 增益介质可以当作均匀展宽来看待。结合实验事实, 我们澄清了使增益介质均匀展宽占优势的概念, 并详细推导了均匀展宽激光器自发产生单纵模运转的条件。

2 标准 Voigt 线型曲线族

标准的 Voigt 函数可以表示为半值宽度为 $2\beta_1$ 的洛仑兹函数 $1/(1+x^2/\beta_1^2)$ 同半值宽度为 $1.665\beta_2$ 的高斯函数 $C\exp(-x^2/\beta_2^2)$ 的卷积, 其中 C 为常数^[1]。Voigt 函数的性态决定于比值 β_2/β_1 。如果取该比值为参变量 $\eta = \beta_2/\beta_1$, 并且令 $\beta_1 = 1, \beta_2 = \eta, C = (\eta\sqrt{\pi})^{-1}$, 标准的 Voigt 线型就具有如下的形式^[2],

$$\Psi(x, \eta) = \frac{1}{\eta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-[(x-y)/\eta]^2\}}{1+y^2} dy$$

其中 x 和 y 表示对线型中心频率的距离, 以频率为单位。显然, 它是半值宽度等于 2 的洛仑兹函数 $1/(1+x^2)$ 与半值宽度为 $2\eta(\ln 2)^{1/2}$ 即 1.665η 的高斯函数 $(\eta\sqrt{\pi})^{-1}\exp[-(x/\eta)^2]$ 的卷积。

当 $\eta = 0$ 时, 利用 δ 函数的定义和性质

$$\delta\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^2\right] = \sqrt{\pi} \delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)dy = f(x)$$

可以严格地证明 $\Psi(x, 0) = 1/(1+x^2)$, 它对应于洛仑兹函数。类似地, 当 $\eta = \infty$ 时 $\Psi(x, \infty)$ 所对应的高斯函数为 $\pi^{-1/2}e^{-x^2}$ 。

我们将文献[2]用数表所示的数值计算结果经过统一坐标整理并绘制成对应于 29 种不同 η 值的标准 Voigt 线型曲线族, 如图 1 所示。为了能观察到细节, 图 1 的横轴只标到 $x = 5$ 。其中在 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ 曲线之间的曲线依次对应于 η 的值: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.44, 0.5, 0.67 和 0.8; 在 $\eta = 1$ 和 $\eta = 2.5$ 之间的曲线所对应的 η 值依次分别为 1.05, 1.11, 1.18, 1.25, 1.33, 1.43, 1.54, 1.67, 1.82, 2 和 2.22; 在 $\eta = 2.5$ 和 $\eta = 10$ 之间的曲线所对应的 η 值依次分别为 2.86, 3.33, 4, 5 和 6.67。

图 2 给出在比较大的 x 范围内具有不同 η 值的 Voigt 曲线之间的比较。可以看出, Voigt 曲线族具有两个特点: 1) 随着 η 的增加, Voigt 曲线与 $\eta = 0$ 曲线的偏差增大; 2) 在 $\eta = 1$ 附近的 Voigt 曲线与 $\eta = 0$ 曲线很接近。

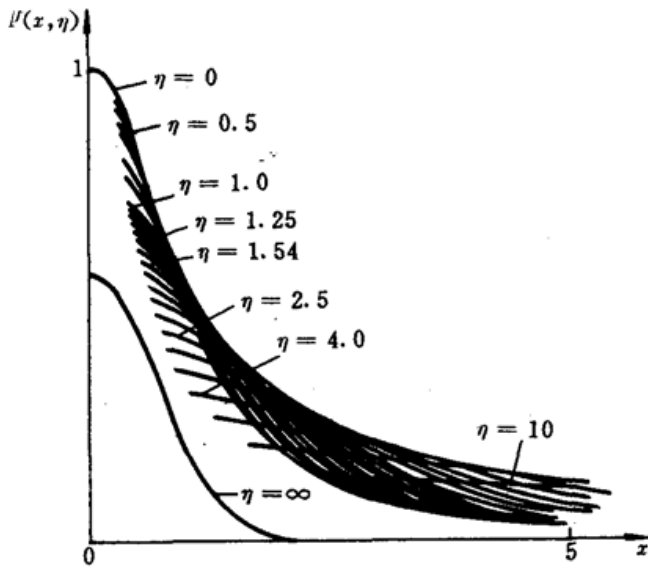


Fig. 1 The family of standard Voigt profiles

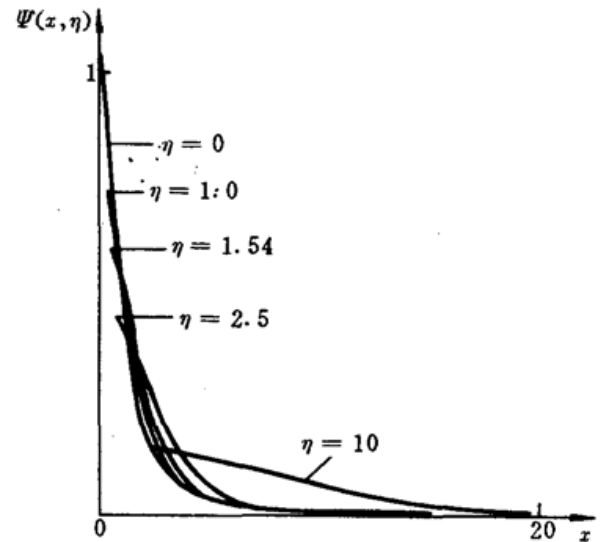


Fig. 2 A comparison between Voigt curves of different \$\eta\$ values

在图 1 和图 2 中,我们省略了负频率范围所对应的曲线。显然,在 \$-\infty\$ 到 \$\infty\$ 的频率范围内,Voigt 曲线对纵轴为对称的。

3 Voigt 线型的宽度

利用 Voigt 函数的傅里叶变换方法,可以给出 Voigt 线型的宽度 \$\Delta x_0\$ 和高斯宽度 \$\Delta x_G\$ 以及洛伦兹宽度 \$\Delta x_L\$ 三者之间的关系为^[8]

$$\frac{\Delta x_L}{\Delta x_0} + \left(\frac{\Delta x_G}{\Delta x_0}\right)^2 = 1$$

如果均匀展宽与非均匀展宽相等,则对应于 \$\Delta x_L/\Delta x_0 = \Delta x_G/\Delta x_0 = 0.62\$,即高斯宽度和洛伦兹宽度都等于 Voigt 宽度的 62%。如果均匀展宽占优势,则对应于 \$\Delta x_L/\Delta x_0 > 0.62, \Delta x_G/\Delta x_0 < 0.62\$,也就是 \$\Delta x_L > \Delta x_G\$。从 \$\Delta x_L = 2\beta_1, \Delta x_G = 1.665\beta_2\$ 和 \$\eta = \beta_2/\beta_1\$ 看出,均匀展宽占优势所对应的 Voigt 曲线的 \$\eta < 1.2\$。

从标准 Voigt 线型曲线族看出 \$\eta \leq 1.2\$ 的曲线与 \$\eta = 0\$ 曲线是很接近的。由此可以推论:只要 \$\Delta x_L \geq \Delta x_G\$,而不必要 \$\Delta x_L \gg \Delta x_G\$,就可以将 Voigt 线型当作均匀展宽的洛伦兹线型来处理。

迄今为止,就我们所知,关于使增益介质均匀展宽占优势的概念都是建立在 \$\Delta x_L \gg \Delta x_G\$ 的条件基础之上^[3]。上述推论将这一概念澄清为:使增益介质均匀展宽占优势的条件是 \$\Delta x_L \geq \Delta x_G\$;在此条件下,即使不满足 \$\Delta x_L \gg \Delta x_G\$,也可以按均匀展宽处理。

这一推论的物理机制可以用 Voigt 线型宽度和高斯宽度以及洛伦兹宽度三者之间的关系来说明。从该关系我们得出

$$\Delta x_0 = \frac{1}{2}\Delta x_L \left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{\Delta x_G}{\Delta x_L}\right)^2} \right]$$

当 \$\Delta x_L \gg \Delta x_G, \Delta x_0 \approx \Delta x_L\$; 当 \$\Delta x_L \geq \Delta x_G, \Delta x_0 \leq 1.62\Delta x_L\$。为了检验当 \$\Delta x_L \geq \Delta x_G\$ 时 Voigt 线型呈现均匀加宽的性质,我们保持 \$\Delta x_G\$ 不变,将 \$\Delta x_L\$ 分解为几个洛伦兹分量相加,例如 \$\Delta x_L = \Delta x_{L1} + \Delta x_{L2}\$,按上式计算相应的 \$\Delta x_{01}\$ 和 \$\Delta x_{02}\$,然后计算相对误差

$$\sigma = \frac{\Delta x_0 - (\Delta x_{01} + \Delta x_{02})}{\Delta x_0}$$

其中 $\Delta x_{G1} = \Delta x_G, \Delta x_{G2} = 0$ 。计算表明,在 $\Delta x_L = \Delta x_G$ 附近和 $\Delta x_L > \Delta x_G$ 这两种情况下,相对误差都很小。例如,当 $\Delta x_L = \Delta x_G, \Delta x_{L1} = \Delta x_{L2}, \sigma = -10\%$ 。这表明,当 $\Delta x_L \geq \Delta x_G$ 时,在一定的误差范围内,Voigt 线型的宽度可线性相加,从而呈现出均匀加宽的性质。

4 对两个实验事实的分析

参考文献[6]和[7]报道了空心阴极氦-镉离子激光器自发呈现单纵模输出的实验结果。但两者关于 441.6 nm 蓝光观测的数据有较大的差异,前者报道为单纵模运转,后者报道为多纵模运转。如果我们同时接受这些报道,就是承认空心阴极氦-镉激光器既可以作自发的单纵模运转,也可以作多纵模运转,那么情形就类似于文献[5]关于氦氖激光器的报道,即当气压增大到使洛仑兹线宽差不多等于高斯线宽时,当激励超过阈值不多时产生单纵模运转,当激励超过阈值许多时产生多纵模运转。由于非均匀展宽的增益介质不可能有自发的单纵模激光输出,均匀展宽的增益介质当粒子的空间转移很迅速而不至于形成空间烧孔时不出现多纵模振荡只出现单纵模激光输出,我们应当假设这两个实验事实属于均匀展宽且腔内纵向形成驻波的情况。我们将激光纵模频率 ω_λ 表示为

$$\omega_\lambda = \bar{\omega}_0 + m\delta$$

其中 $\bar{\omega}_0$ 为原子自发辐射的中心频率, δ 是纵模模式间隔, m 是正或负整数(包括 0)。令与中心频率距离最远的纵模对应于 $m = m_0$ 。那么纵模总数将达到 $M = 2m_0 + 1$ 。

在上述情况下, m_0 应当满足以下条件^[9]

$$\frac{8}{3}m_0^3 + m_0^2 - \frac{2}{3}m_0 < \frac{1}{\delta^2} \frac{\beta_1}{K} (g^2 D_0 - K\beta_1)$$

式中 g 是耦合系数, D_0 是未饱和反转粒子数, K 是腔的衰减系数, β_1 是洛仑兹半宽度。

如果只考虑达到 10% 的精度,上式简化为

$$\frac{8}{3}m_0^3 < \frac{1}{\delta^2} \frac{\beta_1}{K} (g^2 D_0 - K\beta_1)$$

为了估算可以共存的纵模数目,我们将上式作进一步的变化。

产生第一个纵模的阈值条件可以表示为

$$g^2 D_{0,c} = K\beta_1$$

其中 $D_{0,c}$ 是该纵模的阈值反转粒子数。假设未饱和反转粒子数 D_0 比阈反转粒子数 $D_{0,c}$ 高出一个百分比 ρ :

$$D_0 - D_{0,c} = \rho D_{0,c}$$

则上面的不等式可写为

$$\frac{8}{3}m_0^3 < \frac{\beta_1^2}{\delta^2} \rho$$

由此得出,当 $\rho \leq 8\delta^2/3\beta_1^2$ 时, $m_0 < 1$, 单纵模输出;当 $\rho > 8\delta^2/3\beta_1^2$ 时, $m_0 \geq 1$, 多纵模输出。所以, $\rho \leq 8\delta^2/3\beta_1^2$ 就是腔内纵向形成驻波的均匀展宽激光器产生自发单纵模运转的条件。

根据文献[6]的实验数据,腔长 1.3 m 的空心阴极 He-Cd⁺ 激光器纵模间隔 $\delta = 115$ MHz, 537.8 nm 的自发辐射线型中洛仑兹半宽度 $\beta_1 = \frac{1}{2}(0.91 \pm 0.05)$ kHz, $8\delta^2/3\beta_1^2 = 0.17$ 。所以,当 D_0 比阈值高出 17% 时,激光器呈现多纵模运转;当 D_0 比阈值高出不超过 17% 时,激光器呈现自发的单纵模运转。

由于正柱放电型 He-Cd⁺ 激光器若不采用选模技术,呈现多纵模运转,因此可以认为空心

阴极放电形式对于造成 $\eta \leq 1.2$, 并造成 D_0 不过高于阈值这两个条件都有重要的影响。空心阴极效应有助于压缩多普勒展宽、增大洛仑兹展宽, 放电之后电流急剧下降有利于 D_0 不过高于阈值。这些物理机制还有待于进一步研究。

综上所述, 对于气体激光器, 当气压增大到使增益介质均匀展宽占优势时, 尚不能说其“输出趋于单纵模”^[3], 只有当气压增大到使空间烧孔效应由于原子运动而极大地被缓解, 或者空间烧孔存在但激励不超过阈值太多时, 才有自发的单纵模运转发生。

参 考 文 献

- 1 H. C. Van de Hulst, J. J. M. Reesinck, *Astrophys. J.*, **106**, 121(1947)
- 2 J. J. Davies, J. M. Vanghan, *Astrophys. J.*, **137**, 1302(1963)
- 3 P. W. Milonni, J. H. Eberly, *Lasers*, John Wiley & Sons, 1988, 109, 356
- 4 J. H. Eberly, *Laser Spectroscopy IV*, Edited by H. Walther, K. W. Rothe, Springer-Verlag, 1979, 80
- 5 P. W. Smith, *Appl. Phys. Lett.*, **19**, 132(1971)
- 6 宋耀祖, 夏学江 *et al.*, *中国激光*, **11**(9), 554(1984)
- 7 L. Csillag *et al.*, *Opt. Commun.*, **21**, 39(1977)
- 8 S. N. Dobryakov, Ya. S. Lebedev, *Sov. Phys. Dok.*, **13**, 873(1969)
- 9 H. Haken, *Light Volume 2, Laser Light Dynamics*, North-Holland 1985, 95