第 20 卷　第 11 期　　中　国　激　光　　Vol. A20, No. 11
1993 年 11 月　　CHINESE JOURNAL OF LASERS　　November, 1993

光在线性介质中的度规描述*

郭　弘　朱诗通　邓锡铭

（中国科学院上海光机所，上海 201800）

提要　本文引入光学度规模型，研究了光在介质中的运动情形，与传统的结果进行了比较并作出了相应的讨论。

关键词　光学度规

Metric description of light in linear media

GUO Hong, *ZHU Shitong*, *DENG Ximing*

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Abstract　In this paper, the optical metric model was introduced, by which the motion of light in linear media was studied and the comparision with the traditional results are presented.

Key words　optical metric

1　引　言

作为光与物质相互作用的一种模型——光学度规，已被 Zhu 和 Shen 等人广泛应用以解决各类光与物质作用的问题，如运动介质中有质动力[1]、激光加速器中电子能量的增益问题[2]、拍频激光器中的频率匹配问题[3]以及其它一些相关的问题。本文将在此基础上，重新严格地考察此模型的物理意义，并结合 Cartan 结构方程，从新的角度来研究光与介质相互作用问题，并着重对光与线性、均匀、各向同性介质的作用进行讨论，光与非线性介质作用情况另文讨论[4]。

文中均采用国际单位制，平直时空的度规为 $\eta_{\mu\nu}=(-1,1,1,1)$，四维坐标 $x^\mu=(ct,x,y,z)$。

2　理论模型及推导

W. Gordon 于 1923 年发表的一篇文章，阐述了光学度规的思想，其光学度规定义为[5]

$$\bar{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)u_\mu u_\nu \tag{1}$$

收稿日期：1992 年 11 月 13 日；收到修改稿日期：1993 年 7 月 2 日。

* 国家自然科学基金资助项目。

其中 $g_{\mu\nu}$ 为引力度规，n 为介质折射率，u_μ 为实验系中介质的四维运动速度。这种模型的思想是基于以一种数学形式来研究光在介质中所受到的影响，在此模型下，光与介质的作用被等效于一种几何，而这种几何的决定量是光学度规 $g_{\mu\nu}$，如同引力场用 $g_{\mu\nu}$ 来决定的几何一样。因而我们称之为光学度规模型。假定引力时空是平直的闵克夫斯基时空，即 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}=(-1,1,1,1)$，则所有的引力效应都归结为“介质引力”，即发生在(1) 式的后面一项中(它被介质折射率 n 所控制)。

基此模型，我们研究光与介质相互作用问题就遵循两个思路：经典的和量子的。而经典的处理方式又有两种处理方法：

2.1 对于不涉及光场的场强和相位而只讨论其运动轨迹的问题，我们利用测地线方程来解决，即

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^\lambda}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0 \tag{2}$$

其中 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 是仿射联络，τ 是固有时引入流形坐标和活动标架 e^a 及 Cartan 联络 $\omega^c_{\cdot ab}$ 之后，(2) 式等价于

$$de^a+\omega^a_{\cdot b}e^b=0 \tag{3}$$

(3)式结合 Cartan 结构方程

$$\left.\begin{aligned}&de^a+\omega^a_{\cdot b}\wedge e^b=0\\&d\omega^a_{\cdot b}+\omega^a_{\cdot c}\wedge\omega^c_{\cdot b}=-(1/2)R^a_{\cdot b}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中“∧”是反对称外乘符号。则可求解出轨迹方程及曲率 $R^\lambda_{\cdot\rho\mu\nu}$ 从而精确得到关于光在介质中的运动轨迹。

2.2 对于涉及光场强及其相位的问题，可以仿效广义协变的 Maxwell 方程的推导，直接导出在无源场时，应用光学度规模型后得到的新的协变方程：

$$\left.\begin{aligned}&F^{(\mu\nu,\lambda)}=0\\&\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\sqrt{-g}H^{\mu\nu}]=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中

$$F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c\\-E_1/c & 0 & B_3 & -B_2\\-E_2/c & -B_3 & 0 & B_1\\-E_3/c & B_2 & -B_1 & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$H^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & D_1c & D_2c & D_3c\\-D_1c & 0 & H_3 & -H_2\\-D_2c & -H_3 & 0 & H_1\\-D_3c & H_2 & -H_1 & 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

仿效 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，令 $H^{\mu\nu}u_\mu=c^2\varepsilon F^{\mu\nu}u_\nu$ 及 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，令 $F[^{\mu\nu}u_{\tau]}=\mu H[^{\mu\nu}u_{\tau]}$，可以得到与[6]相同的结果。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\frac{\varepsilon\mu c^2-1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\\&\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\frac{\varepsilon\mu c^2-1}{c^2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v})\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 ε 为介电常数，μ 为磁导率。我们今后将根据(5) 式讨论所有光与物质作用时涉及场强与相

位的问题。需要强调的是,(4) 式中的 d 是指外微分。在后面的讨论中,为方便起见,光学度规就用 $g_{\mu\nu}$ 表示,而 $g_{\mu\nu}$ 取为 $\eta_{\mu\nu}$。

下面分别从这两种方法来讨论光在各向同性的均匀的线性介质中的运动情形。

2.1　**运动轨迹研究**(假定介质是静止的)

此时 $n=$ 常数,$g_{\mu\nu}=(-1/n^2,1,1,1)$,不变元 $d\tau^2=-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=(c^2/n^2)dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$,在柱坐标系下,变为 $d\tau^2=(c^2/n^2)dt^2-dr^2-r^2d\phi^2-dz^2$,即 $g_{00}=-1/n^2, g_{rr}=1, g_{\phi\phi}=r^2, g_{zz}=1$。引入活动标架,记为

$$d\tau^2=(e^0)^2-(e^1)^2-(e^2)^2-(e^3)^2 \tag{9}$$

于是

$$e^0=(c/n)dt,\quad e^1=dr,\quad e^2=rd\phi,\quad e^3=dz \tag{10}$$

利用 cartan 结构方程(4)来求 $R^a_{\cdot bcd}$ 及轨迹

$$\left.\begin{aligned}
&de^0=d\left(\frac{c}{n}dt\right)=0\\
&de^1=d(dr)=0\\
&de^2=d(rd\phi)=dr\wedge d\phi=(1/r)e^1\wedge e^2\\
&de^3=d(dz)=0
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

又 $-de^a=\omega^a_{\cdot b}\wedge e^b$,故有

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^0_{\cdot 1}\wedge e^1+\omega^0_{\cdot 2}\wedge e^2+\omega^0_{\cdot 3}\wedge e^3=0\\
&\omega^1_{\cdot 0}\wedge e^0+\omega^1_{\cdot 2}\wedge e^2+\omega^1_{\cdot 3}\wedge e^3=0\\
&\omega^2_{\cdot 0}\wedge e^0+\omega^2_{\cdot 1}\wedge e^1+\omega^2_{\cdot 3}\wedge e^3=-\frac{1}{r}e^1\wedge e^2=\frac{1}{r}e^2\wedge e^1\\
&\omega^3_{\cdot 0}\wedge e^0+\omega^3_{\cdot 1}\wedge e^1+\omega^3_{\cdot 2}\wedge e^2=0
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

可以解得

$$\begin{aligned}
&\omega^1_{\cdot 2}=-d\phi,\qquad \omega^2_{\cdot 1}=d\phi\\
&\omega^a_{\cdot b}=0,\qquad (\text{其它})
\end{aligned} \tag{13}$$

于是由

$$d\omega^1_{\cdot 2}+\omega^1_{\cdot c}\wedge\omega^c_{\cdot 2}=-\frac{1}{2}R^1_{\cdot 2}$$

联立(13),得

$$R^1_{\cdot 2}=0$$

从而以相似方式可求得各个 $R^a_{\cdot b}$,注意到

$$R^a_{\cdot b}=R^a_{\cdot bcd}e^c\wedge e^d \tag{14}$$

易推知

$$R^a_{\cdot bcd}\equiv 0 \tag{15}$$

(上述推导中用到 $-\omega^a_{\cdot b}=\omega^b_{\cdot a}(a,b\neq 0$,及 $\omega^0_{\cdot i}=\omega^i_{\cdot 0})$

(15) 式是平直时空的充分且必要条件,故此时“介质时空”是平直的,对粒子无弯曲效果,因而光线将在介质中直线行进至无穷远而无任何自聚焦、衍射等现象。这与几何光学中的费马原理导出的结论是一致的。与(3) 式联立后可由 Cartan 方程推知[4],轨迹方程为

$$\left.\begin{aligned}
r&=\text{常数}\\
\dot z&=\text{常数}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

即光线将平直地射出而行进速度不变。

2.2 场的研究

当将光视为一电磁场后，我们可以从我们的协变方程推出电磁场强的变化情况。此时 $\sqrt{-g} = 1/n =$ 常数，故可以推得

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{D}/\partial t \\ &\nabla \times \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

此即有介质(线性)时的 Maxwell′s 方程，从它即可推出光在介质中的波动情况，波的振幅、相位及传播速度等，容易知道波的传播速度为 c/n，此即为(16) 中 $\dot{z}$ 之值。

作者感谢赵东升、赵永华、李传东、叶海的有益讨论。

参 考 文 献

1 Shitong Zhu, Wenda Shen, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**, 739(1987)

2 朱莳通，沈文达 *et al.*，*物理学报*，**38**(4)，559(1989)

3 朱莳通，*物理学报*，**38**(7)，1167(1989)

4 郭 弘，朱莳通，*光学学报*，(待发表)

5 W. Gordon, *Annalen Der Physik*, **72**, 421(1923)

6 朗 道，周 奇 译，连续媒质电动力学（下册），人民教育出版社，1963 年 7 月，336～337