

彩虹全息综合狭缝的理论分析

王取泉 答孝义

(武汉大学物理系, 武汉 430072)

提要 本文对一步无狭缝彩虹全息中平移物体和透镜形成的综合狭缝的位置和宽度进行了比较全面的理论分析,并提出了获得综合狭缝的一种新方法。

关键词 彩虹全息术,综合狭缝彩虹全息术,无狭缝彩虹全息术

Theoretical analysis of synthetic slit in rainbow holography

WANG Ququan, DA Xiaoyi

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract The location and distribution of the slits synthesized by translating object and imaging lens in one-step rainbow holography are analysed systematically, and the method of obtaining a suitable location and width of synthetic slit is also given.

Key words rainbow holography, synthetic slit rainbow holography, slitless rainbow holography

1 引言

无狭缝彩虹全息术中综合狭缝的方法有三种:平移物体法^[1,2]、平移透镜法^[3,4]和等速平移物体和透镜的方法^[5]。在共轭再现时,平移物体法所形成的综合狭缝位于透镜的后焦平面上,平移透镜法所形成的综合狭缝位于透镜的后表面上,而等速平移物体和透镜的方法所形成的综合狭缝则位于无限远处。本文利用标量衍射理论,对不同记录方法所获得的综合狭缝的形成位置及其分布形式进行统一的分析,比较移动物体与移动透镜在本质上的相同与差异之处;理论分析的结果给出了一种使综合狭缝形成于任意固定位置的记录方法,并讨论了无畸变像再现与虚像再现时获得实综合狭缝的条件。

2 理论分析

在图1中, (x_0, y_0) , (x_l, y_l) , (x_h, y_h) 分别表示物平面、透镜平面与全息底片平面上二维直角坐标,取光轴为 z 轴, z 轴的 o 点在全息底片上。用垂直于 y_0 轴的平行光 C_0 照明三维散射物体 O ,

平行光 C_0 的空间频率记为 (α, σ, γ) , 物体沿 y_0 方向上的平移量记为 ε , 将物体平移前后物体表面

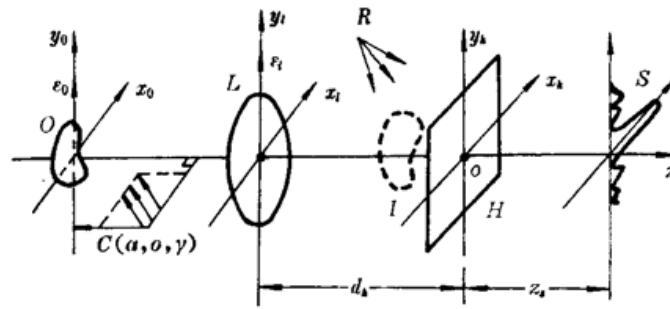


Fig. 1 A basic recording configuration

O : object; L : imaging lens; I : image; C : illuminating beam;

R : reference beam; S : synthetic slit; H : holographic plate

的反射光场分别记为 $O'(x_0, y_0, z_0)$ 和 $O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$, 这两者的关系式为^[5]

$$O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon) = O'(x_0, y_0 - \varepsilon, z_0) \quad (1)$$

物体位移后在成像透镜的前表面上的光场为

$$\begin{aligned} O_i(x_i, y_i, z_i; \varepsilon) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} O'(x_0, y_0 - \varepsilon, z_0) \exp\left\{jk \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{2(z_i - z_0)}\right\} dx_0 dy_0 \\ &= O'(x_i, y_i - \varepsilon, z_i) \end{aligned} \quad (2)$$

当物体沿 y_0 方向微小平移 ε 的同时, 使透镜沿 y_i 方向平移 $\varepsilon' = m\varepsilon$ (m 为一比例常数), 则透镜后表面上的光场为

$$\begin{aligned} O_i(x_i, y_i, z_i; \varepsilon) \cdot \exp\left\{-jk \frac{x_i^2 + (y_i - m\varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ = O'(x_i, y_i - \varepsilon, z_i) \times \exp\{-jk[x_i^2 + (y_i - m\varepsilon)^2]/2f\} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 f 为成像透镜的焦距值, 在全息底片上的物光场为

$$\begin{aligned} O_h(x_h, y_h; \varepsilon, m\varepsilon) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} O'(x_i, y_i - \varepsilon, z_i) \exp\left\{-jk \frac{x_i^2 + (y_i - m\varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{jk \frac{(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2}{2d_h}\right\} dx_i dy_i \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $d_h = |z_i|$, 代表全息底片至透镜的距离。设球面参考光波的球心坐标为 (x_r, y_r, z_r) , 则参考光波在全息底片上的分布为

$$R(x_h, y_h) = \exp\left\{-jk \frac{(x_h - x_r)^2 + (y_h - y_r)^2}{2z_r}\right\} \quad (5)$$

当 $z_r > 0$ 时, (5) 式表示会聚球面参考波, 当 $z_r < 0$ 时, 则表示发散球面波。在全息底片上的光强度分布为

$$I(x_h, y_h; \varepsilon, m\varepsilon) = |O_h|^2 + |R|^2 + O_h(x_h, y_h; \varepsilon, m\varepsilon)R^* + O_h^*(x_h, y_h; \varepsilon, m\varepsilon)R \quad (6)$$

在整个全息记录过程中, 使物体从 $(y_0 - \varepsilon_0/2)$ 匀速平移到 $(y_0 + \varepsilon_0/2)$, 同时使透镜从 $(y_i - \varepsilon_i/2)$ 匀速平移到 $(y_i + \varepsilon_i/2)$, $\varepsilon_i = m\varepsilon_0$, 通过线性记录后的全息底片的振幅透过率为(略去常数因子)

$$T(x_h, y_h) = \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} I(x_h, y_h; \varepsilon, m\varepsilon) d\varepsilon \quad (7)$$

记球面照明再现光波的中心坐标为 (x_c, y_c, z_c) , 则照明光波在全息底片上的光场为

$$C(x_h, y_h) = \exp\left\{-jk' \frac{(x_h - x_c)^2 + (y_h - y_c)^2}{2z_c}\right\} \quad (8)$$

其中 $k' = 2\pi/\lambda'$, λ' 为照明光波的波长, 当 $z_c > 0$ 时表示照明光为会聚光, $z_c < 0$ 表示发散光。

2.1 无畸变像综合狭缝

COR* 项对应着原始无畸变像, 它传输到距离全息图 z_i 处的光场分布为

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i, z_i) &= \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} d\varepsilon \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{COR}^* \exp\left\{jk' \frac{(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2}{2z_i}\right\} dx_h dy_h \\ &= \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} d\varepsilon \iiint_{-\infty}^{+\infty} O_l'(x_l, y_l - \varepsilon, z_l) \exp\left\{-jk \frac{x_l^2 + (y_l - m\varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{jk \left[\frac{(x_h - x_l)^2 + (y_h - y_l)^2}{2d_h} + \frac{(x_h - x_c)^2 + (y_h - y_c)^2}{2z_c}\right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{jk' \left[\frac{(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2}{2z_i} - \frac{(x_h - x_c)^2 + (y_h - y_c)^2}{2z_c}\right]\right\} \\ &\quad \times dx_h dy_h dx_l dy_l \\ &= A' \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} d\varepsilon \iint_{-\infty}^{+\infty} O_l'(x_l, y_l - \varepsilon, z_l) \exp\left\{-jk \frac{x_l^2 + (y_l - m\varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{jk \frac{(x_i' - x_l)^2 + (y_i' - y_l)^2}{2(d_h + z_i')}\right\} dx_l dy_l \end{aligned} \quad (9)$$

式中 A' 为一积分常数, 其它各参量的关系为

$$1/z_i' = \lambda/\lambda' z_i - \lambda/\lambda' z_c + 1/z_r \quad (10)$$

$$x_i'/z_i' = \lambda x_i/\lambda' z_i - \lambda x_c/\lambda' z_c + x_r/z_r \quad (11)$$

$$y_i'/z_i' = \lambda y_i/\lambda' z_i - \lambda y_c/\lambda' z_c + y_r/z_r \quad (12)$$

再令

$$d_s' = d_h + z_s' = \varepsilon_0 f / (\varepsilon_0 - \varepsilon_l) \quad (13)$$

由(10), (13)式求得

$$z_s = \frac{\lambda z_c z_r z_s'}{\lambda z_r z_s' + \lambda' z_c z_r - \lambda' z_c z_s'} = \frac{\lambda z_c z_r (d_s' - d_h)}{(\lambda z_r - \lambda' z_c) (d_s' - d_h) + \lambda' z_c z_r} \quad (14)$$

根据(9), (13)式可求得在距离全息图 $z_i = z_s$ 处的光场分布为

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i, z_s) &= \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} \exp\left\{-jk \left[\frac{(\varepsilon - \varepsilon') y_i'}{f} + \frac{(\varepsilon'^2 - \varepsilon \varepsilon')}{2f}\right]\right\} d\varepsilon \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{+\infty} O_l'(x_l, y_l - \varepsilon, z_l) \exp\left\{-jk \frac{x_l^2 + (y_l - \varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{jk \frac{(x_i' - x_l)^2 + [y_i' - (y_l - \varepsilon)]^2}{2d_s'}\right\} dx_l dy_l \\ &\approx \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} \exp\{-j2\pi(1-m)\varepsilon y_i' / \lambda f\} d\varepsilon \cdot u_i'(x_i, y_i, z_s) \\ &= \text{sinc}\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_l) y_i' / \lambda f\} \cdot u_i'(x_i, y_i, z_s) \end{aligned} \quad (15)$$

式中略去了由于透镜移动而引起的二阶位相因子 $k(\varepsilon'^2 - \varepsilon \varepsilon')/2f$, 当透镜的移动量较小时(即 $\varepsilon' \ll y_i'$), 这种近似是合理的。另外式中 $u_i'(x_i, y_i, z_s)$ 表示物体和透镜不移动时记录的全息图在

z_s 处的再现光波场, (15) 式表明: 在 $z_i = z_s$ 处将再现得到一个 sinc 函数调制的光场分布, 这正是所期望的综合狭缝分布。sinc $\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_i)y_i' / \lambda f\}$ 函数的主极大所对应的 y_i' 的取值范围是

$$|\Delta y_i'| = 2\lambda f / |\varepsilon_0 - \varepsilon_i| \quad (16)$$

由(12), (16)式求得综合狭缝的宽度为

$$W = |\Delta y_i| = (\lambda' z_s / \lambda z_s') |\Delta y_i'| = (z_s / z_s') 2\lambda' f / |\varepsilon_0 - \varepsilon_i| \quad (17)$$

当用原波长原光路再现时($C = R, z_c = z_r, \lambda = \lambda'$), 由(13), (14)式得到综合狭缝的位置在

$$z_s = z_s' = \varepsilon_0 f / (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) - d_h \quad (18)$$

综合狭缝的宽度为

$$W = 2\lambda f / |\varepsilon_0 - \varepsilon_i| \quad (19)$$

令 $z_s > 0$, 求出形成实综合狭缝的条件为

$$1 - f/d_h < \varepsilon_i/\varepsilon_0 < 1; \quad (d_h > f) \quad (20)$$

2.2 贗像综合狭缝

COR* 项对应着贗像, 它传输到距离全息图 z_i 处的光场为

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i, z_i) = & \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} d\varepsilon \iiint_{-\infty}^{+\infty} O_i^*(x_i, y_i - \varepsilon, z_i) \exp\left\{jk \frac{x_i^2 + (y_i - m\varepsilon)^2}{2f}\right\} \\ & \times \exp\left\{-jk \left[\frac{(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2}{2d_h} + \frac{(x_h - x_r)^2 + (y_h - y_r)^2}{2z_r}\right]\right\} \\ & \times \exp\left\{jk' \left[\frac{(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2}{2z_i} - \frac{(x_h - x_c)^2 + (y_h - y_c)^2}{2z_c}\right]\right\} \\ & \times dx_h dy_h dx_r dy_r \end{aligned} \quad (21)$$

比较(21)式和(9)式的第二个等式, 其形式基本上相同, 不同的是: $O_i \rightarrow O_i^*, f \rightarrow -f, d_h \rightarrow -d_h, z_r \rightarrow -z_r$ 。因此, 只需将这四参量进行相应的代换, 再现无畸变像时综合狭缝的讨论结果将同样适用于再现贗像时的情形, 故对贗像再现时有

$$d_s' = -d_h + z_s' = -\varepsilon_0 f / (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \quad (22)$$

综合狭缝的位置在

$$z_s = \frac{\lambda z_c z_r (d_s' + d_h)}{(\lambda z_r + \lambda' z_c)(d_s' + d_h) + \lambda' z_c z_r} \quad (23)$$

综合狭缝的宽度表达式与(17)式相同。

当用原波长共轭再现贗像时($C = R^*, \lambda = \lambda', z_c = -z_r$), 由(22), (23)式得到综合狭缝的位置在

$$z_s = z_s' = d_h - \varepsilon_0 f / (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \quad (24)$$

当全息底片置于透镜的焦距之外(即 $d_h > f$) 时, 均能满足形成实综合狭缝的条件 $z_s > 0$, 其综合狭缝的宽度为

$$W = 2\lambda f / |\varepsilon_0 - \varepsilon_i| \quad (25)$$

3 讨 论

3.1 首先讨论(15)式中近似成立的条件。综合狭缝的调制函数为

$$\begin{aligned}
 L(y_i', \varepsilon_0, \varepsilon_t) &= \int_{-\varepsilon_0/2}^{+\varepsilon_0/2} \exp \left\{ -jk \left[\frac{(\varepsilon - \varepsilon') y_i'}{f} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon') \varepsilon'}{2f} \right] \right\} d\varepsilon \\
 &= \int_{-|\varepsilon_0 - \varepsilon_t|/2}^{|\varepsilon_0 - \varepsilon_t|/2} \exp \left\{ -jk (\varepsilon' y_i' / f - \varepsilon'^2 / 2f') \right\} d\varepsilon
 \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon' = (1 - m)\varepsilon$, $f' = (\varepsilon - \varepsilon')f/\varepsilon' = (1 - m)f/m$, (26) 式与文献[6]中移动透镜综合狭缝的调制函数(4)式在形式上基本相同, 根据文献[6]中的讨论结果: 忽略二次位相因子对透镜移动量 ΔS 的限制条件为 $S = 2\sqrt{2\lambda f}/\Delta S \geq 4$ 。在此处作适当的替换: $f \rightarrow f'$, $\Delta S \rightarrow |\varepsilon_0 - \varepsilon_t|$, 得到对于双移动法忽略二次位相因子的条件为

$$|1/m - 1|^{1/2} \varepsilon_t \leq (\lambda f/2)^{1/2} \quad (27)$$

当物体固定不动时(即 $\varepsilon_0 = 0$), (27) 式回到文献[6]中的(6)式; 而当透镜固定不动时(即 $\varepsilon_t = 0$), 二次位相因子消失, (27) 式自然得到满足。可见, 二次位相因子是由移动透镜而产生的。

3.2 下面讨论三种特殊的移动情况:

3.2.1 当 $\varepsilon_0 \neq 0, \varepsilon_t = 0$ 时, 即平移物体而透镜不动, 在共轭再现时($C = R^*$, $\lambda' = \lambda$), 由(24)式得到

$$z_s = z_s' = d_h - f \quad (28)$$

即此时综合狭缝位于原透镜的后焦平面上, 其综合狭缝的宽度为 $2\lambda f/\varepsilon_0$, 这与文献[5, 7]中的结论相同。

3.2.2 当 $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_t \neq 0$ 时, 即平移透镜而物体不动, 在共轭再现时($C = R^*$, $\lambda' = \lambda$), 由(24)式得到

$$z_s = z_s' = d_h \quad (29)$$

即此时综合狭缝位于原成像透镜所在的平面上, 其综合狭缝的宽度为 $2\lambda f/\varepsilon_t$, 这与文献[4]中的结论相同。

3.2.3 当 $\varepsilon_0 = \varepsilon_t \neq 0$ 时, 即物体和透镜以相同的速度同时平移, 对于再现原始像, 由(13), (14)式求得 $d_s' = \infty, z_s' = \infty$, 以及

$$1/z_s = 1/z_c - \lambda'/\lambda z_r \quad (30)$$

由(13), (17)式求得其综合狭缝的宽度为

$$W = 2\lambda' z_s/\varepsilon_0 \quad (31)$$

(30)式与(31)式与文献[5]中的结果相同。

参 考 文 献

- 1 C. P. Grover, H. M. Van Driel, *JOSA*, **70**(3), 335(1980)
- 2 陈桂丛, 单启蛰, *中国激光*, **12**(6), 324~329(1985)
- 3 A. Beauregard, R. A. Lessard, *Appl. Opt.*, **23**(18), 3095~3098(1984)
- 4 国承山, *中国激光*, **14**(12), 738~740(1987)
- 5 Xianguan Cheng, Zhiyan Wang, *Appl. Opt.*, **31**(2), 205~207(1992)
- 6 张申如, 林树庄, 邓晓燕, *光学学报*, **9**(4), 364~369(1989)
- 7 C. P. Grover, R. A. Lessard et al., *Appl. Opt.*, **22**(20), 3300~3304(1983)