第 20 卷 第 1 期
1993 年 1 月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. 20, No. 1
January, 1993

一类新的光场迭加态的高阶压缩特性

马爱群
（哈尔滨大学，150020）

雷仕湛
（中国科学院上海光机所，201800）

姜作宏
（黑龙江大学，150080）

提要 本文讨论了由光场真空态、双光子 Fock 态同 $n(n>3)$ 光子 Fock 态迭加而构成的光场迭加态的高阶压缩特性。

关键词 迭加态，高阶压缩

High order squeezing characteristics of a new optical field superposition states

Ma Aiqun
(Harbin Institute of Technology, Harbin 115020)

Lei Shizhan
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Jiang Zuohong
(Hei Long Jiang University, Harbin 150050)

Abstract In this paper, we discuss the high order squeezing characteristics of the optical field which involves vacuum state, one-photon state and n-photon state.

Key words superposition states, high order squeezing

1 引 言

压缩态光场的电场两个正交相分量之一的噪声比测不准关系所允许的最小平均噪声（方均差）还小，决定了压缩态光场在光通讯和引力波探测上有着极其诱人的前景。人们寻找了能够产生压缩态的光场，诸如双光子过程、光子消灭算符 a 的 k 次幂的正交归一化本征态所描述

收稿日期：1991 年 4 月 2 日；收到修改稿日期：1991 年 7 月 8 日。

的光场等等。人们还发现光场真空态与单光子 Fock 态或双光子 Fock 态的迭加态也存在二阶压缩效应[1]。作者之一曾经证明，光场真空态、单光子 Fock 态和 $n(n>3)$ 光子 Fock 态的迭加态依然存在二阶压缩特性[2]。夏云杰、郭光灿等人研究了光场真空态和单光子 Fock 态或双光子 Fock 态的迭加而产生的压缩迭加态的高阶压缩特性[3]。结果表明，这两个迭加态均可以存在任意阶高阶压缩。光场真空态和 $n(n>3)$ 光子 Fock 态的迭加态，只有在 $n=2m$ 时才存在高阶压缩特性[4]。

本文证明新的一类迭加态：$|\psi_n\rangle=\alpha_n|0\rangle+\beta_n|2\rangle+\gamma_n|n\rangle$ 依然存在高阶压缩特性。

2 高阶压缩的基本概念

高阶压缩是在光场的二阶压缩的基础上由 C. K. Hong 和 L. Mandel 加以推广而提出的[5]。

厄米算符 Q、P 分别为

$$Q=1/\sqrt{2}\cdot(a+a^{+}), \qquad P=1/\sqrt{2}i\cdot(a-a^{+}) \tag{2.1}$$

显然，Q,P 是量子化电场的两个正交分量。C. K. Hong 和 L. Mandel 提出，如果对于某态，$(\Delta Q)^{2N}$ 的期望值 $\langle\psi|(\Delta Q)^{2N}|\psi\rangle$ 小于 $(\Delta Q)^{2N}$ 在相干态(包括真空态)的期望值，则称 $|\psi\rangle$ 具有 $2N$ 阶压缩特性，通常的压缩就是这种高阶压缩的特例，即二阶压缩。

由 Backer—Hausdoff 公式，可以得到

$$(\Delta Q)^{2N}=\sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{2\gamma}}:(\Delta Q)^{2N-2\gamma}:=\frac{(2N)!}{N!2^{2N}}+\sum_{\gamma=0}^{N-1}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{2\gamma}}:(\Delta Q)^{2N-2\gamma} \tag{2.2}$$

众所周知，对于相干态或是真空态来说，所有正规排列的方差均为 0，因而某一态 $|\psi\rangle$ 具有第 $2N$ 阶压缩，显然应满足如下条件

$$\langle\psi|(\Delta Q)^{2N}|\psi\rangle<\frac{(2N)!}{N!2^{2N}} \tag{2.3}$$

或

$$\sum_{\gamma=0}^{N-1}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{2\gamma}}\langle\psi|:(\Delta Q)^{2N-2\gamma}:|\psi\rangle<0 \tag{2.4}$$

C. K. Hong 和 L. Mandel 首先证明了参量放大过程、二次谐波、共振荧光中存在高阶压缩特性。

3 $|\psi_n\rangle$ 的高阶压缩

光场真空态、双光子 Fock 态和 $n(n>3)$ 光子 Fock 态的迭加态为

$$|\psi_n\rangle=\alpha_n|0\rangle+\beta_n|2\rangle+\gamma_n|n\rangle \tag{3.1}$$

其中

$$|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2+|\gamma_n|^2=1 \tag{3.2}$$

$|\psi_n\rangle$ 中 Q 的平均值为

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|1/\sqrt{2}\cdot(a+a^{+})|\psi_n\rangle&=\langle\psi_n|Q|\psi_n\rangle\\&=(\langle n|\gamma_2^*+\langle 2|\beta_2^*+\langle 0|\alpha_2^*)\frac{a+a^{+}}{\sqrt{2}}(\alpha_2|0\rangle+\beta_2|2\rangle+\gamma_2|n\rangle)\\&=(\langle n|\gamma_2^*+\langle 2|\beta_2^*+\langle 0|\alpha_2^*)\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_2\sqrt{2}|1\rangle+\gamma_2\sqrt{n}|n-1\rangle\\&\quad+\alpha_2|1\rangle+\beta_2\sqrt{3}|3\rangle+\gamma_2\sqrt{n+1}|n+1\rangle)=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\langle\psi_n|(\Delta Q)^{2N}|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|Q^{2N}|\psi_n\rangle : = |\alpha_n|^2\langle 0|Q^{2N}|0\rangle + |\beta_n|^2\langle 2|Q^{2N}|2\rangle + |\gamma_n|^2\langle n|Q^{2N}|n\rangle$$
$$+ \alpha_n^*\beta\langle 0|Q^{2N}|2\rangle + (\alpha_n^*\beta\langle 0|Q^{2N}|2\rangle)^* + \alpha_n^*\gamma\langle 0|Q^{2N}|n\rangle + (\alpha_n^*\gamma\langle 0|Q^{2N}|n\rangle)^*$$
$$+ \beta_n^*\gamma_n\langle 2|Q^{2N}|n\rangle + (\beta_n^*\gamma_n\langle 2|Q^{2N}|n\rangle)^* \tag{3.4}$$

由于
$$Q^{2N} = \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!N\gamma!2^{N+\gamma}} : (a+a^+)^{(2n-2\gamma)} \tag{3.5}$$

$$\langle 0|Q^{2N}|0\rangle = \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\langle 0| : (a^++a)^{2N-2\gamma} : |0\rangle \tag{3.6}$$

显然只有当$(a^++a)^{2N-2\gamma}=1$时,即$N=\gamma$时上式才不为 0,故

$$\langle 0|Q^{2N}|0\rangle = \frac{(2N)!}{2^{2N}N!} \tag{3.7}$$

为要求出$\langle n|Q^{2N}|n\rangle$,下面先证明一个较为普通的公式 :

$$\langle n|Q^{2N}|n\rangle = \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left\{N!2^Nn!\sum_{\gamma=\max(0,\ N-n)}^{N}\frac{1}{\gamma!2^\gamma[(N-\gamma)!]^2(n-N+\gamma)!}\right\} \tag{3.8}$$

由(3.5)式可得

$$\langle n|Q^{2N}|n\rangle = \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\langle n| : (a+a^+)^{2N-2\gamma} : |n\rangle$$
$$= \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\sum_K C_{2N-2\gamma}^{K}\langle n| : a^{+K}a^{2N-2\gamma-K} : |n\rangle \tag{3.9}$$

上式不等于 0 的项应满足

$$K \leqslant n \tag{3.10}$$
$$K = N-\gamma \tag{3.11}$$

那么(3.9)式应变为

$$\langle n|Q^{2N}|n\rangle = \sum_{\gamma=\max(N-n,0)}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\frac{(2N-2\gamma)!}{[(N-\gamma)!]^2}\cdot n(n-1)\cdots(n-N+\gamma+1)$$
$$= \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left[N!2^Nn!\sum_{\gamma=\max(N-n,0)}^{N}\frac{1}{\gamma!2^\gamma[(N-\gamma)!]^2(n-N+1)}\right] \tag{3.12}$$

其中γ的最小值取值范围由(3.10)和(3.11)决定。

很显然(3.12)可变为 :

$$\langle n|Q^{2N}|n\rangle = \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left[1+N!2^Nn!\sum_{\gamma=\max(0,N-n)}^{N-1}\frac{1}{\gamma!2^\gamma[(N-\gamma)!]^2(n-N+\gamma)!}\right] \tag{3.13}$$

当$n=2$时

$$\langle 2|Q^{2N}|2\rangle = \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left[N!2^N2!\sum_{\gamma=N-2}^{N}\frac{1}{\gamma!2^\gamma[(N-\gamma)!]^2(2-N+\gamma)!}\right]$$
$$= \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}[1+2N+2N^2] \tag{3.14}$$

由(3.5)式

$$\langle 0|Q^{2N}|n\rangle = \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\langle 0| : (a+a^+)^{2N-2\gamma} : |n\rangle$$
$$= \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}} = \sum_K C_{2N-2\gamma}^{K}\langle 0|a^{+K}a^{2N-2\gamma-K}|n\rangle \tag{3.15}$$

若(3.15)式不为 0,那么$K=0$,从而(3.15)式变为

$$\langle 0|Q^{2N}|n\rangle = \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\langle 0|a^{2N-2\gamma}|n\rangle \tag{3.16}$$

显然当n为奇数时

$$\langle 0|Q^{2N}|n\rangle = 0 \tag{3.17}$$

当 n 为偶数时，只有 $2N-2\gamma=n$ 时

$\langle 0|a^{2N-2\gamma}|n\rangle \neq 0$，　此时

$$\langle 0|Q^{2N}|n\rangle = \frac{(2N)!\sqrt{n!}}{n!(N-n/2)!2^{2N-n/2}} \tag{3.18}$$

当 $n=2$ 时

$$\langle 0|Q^{2N}|2\rangle = \frac{(2N)!}{N!2^{2N}}(\sqrt{2}N) \tag{3.19}$$

由(3.5)式

$$\begin{aligned}\langle 2|Q^{2N}|n\rangle &= \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\langle 2|:(a+a^{+})^{2N-2\gamma}:|n\rangle \\ &= \sum_{\gamma=0}^{N}\frac{(2N)!}{(2N-2\gamma)!\gamma!2^{N+\gamma}}\sum_{K}C_{2N-2\gamma}^{K}\langle 2|a^{+K}a^{2N-2\gamma-k}|n\rangle\end{aligned} \tag{3.20}$$

若(3.20)不为 0，那么只有 $K=0,1,2$，而当 $K=0,1,2$ 时(3.20)若不为 0 必须

$2N-2\gamma=N-2, 2N-2\gamma-1=n-1, 2N-2\gamma-2=n$。

即　$\gamma=N-n/2+1$

$\gamma=N-n/2$

$\gamma=N-n/2-1$　这就是说若(3.20)不为 0，n 必须为偶数，那么

$$\langle 2|Q^{2N}|n\rangle = 0 \quad (n\text{ 为奇数}) \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\langle 2|Q^{2N}|n\rangle = &\frac{(2N)!}{n!(N-n/2)!2^{2N-n/2}}[n\sqrt{n(n-1)(n-2)\cdots 2}] \\ &+\frac{(2N)!}{(n-2)!(N-n/2+1)!2^{2N-n/2+1}}[\sqrt{n(n-1)\cdots 3}] \\ &+\frac{(2N)!}{(n+2)!(N-n/2-1)!2^{2N-n/2-1}}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\sqrt{n!}\right]\end{aligned} \tag{3.22}$$

将(3.7)，(3.13)，(3.14)，(3.18)，(3.19)，(3.22)代入(3.4)式，有

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|Q^{2N}|\psi_n\rangle = &|\alpha_n|^2\frac{(2N)!}{2^{2N}N!}+|\beta_n|^2\frac{2N)!}{2^{2N}N!}(1+2N^2+2N) \\ &+|\gamma_n|^2\left\{1+\sum_{\gamma_{max(0,N-n)}}^{N-1}\frac{N!2^N n!}{\gamma!2^{\gamma}[(N-\gamma)!]^2(n-N+\gamma)!}\right\}\frac{(2N)!}{2^{2N}N!} \\ &+2|\alpha_n||\beta_n|\frac{(2N)!}{N!2^{2N}}(\sqrt{2}N)\cos\Delta\varphi_{02}+2|\alpha_n||\gamma_n|\frac{(2N)!}{n!2^{2N-n/2}}\cos\Delta\varphi_{on} \\ &+2|\beta_n||\gamma_n|\left\{\frac{(2N)!\sqrt{n(n-1)\cdots 3}}{(n-2)!(N-n/2+1)!2^{2N-n/2+1}}+\frac{(2N)!n\sqrt{n(n-1)\cdots 2}}{n!(N-n/2)!2^{2N-n/2}}\right. \\ &\left.+\frac{(2N)!}{(n+2)!(N-n/2-1)!2^{2N-n/2+1}}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\sqrt{n}\right]\right\}\cos\Delta\varphi_{2n} \\ = &\frac{(2N)!}{2^{2N}N!}+|\beta_n|^2\frac{(2N)!}{2^{2N}N!}(2N^2+2N) \\ &+|\gamma_n|^2\sum_{\gamma max(0,N-n)}^{N-1}\frac{N!2^N n!}{\gamma!2^{\gamma}[(N-\gamma)!]^2(n-N+\gamma)!} \\ &+2|\alpha_n||\beta_n|(\sqrt{2}N)\cos\Delta\varphi_{02}\frac{(2N)!}{2^{2N}N!} \\ &+2|\alpha_n||\gamma_n|\frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left[\frac{N(N-1)\cdots(N-n/2+1)}{\sqrt{n!}2^{-n/2}}\right]\cos\Delta\varphi_{on} \\ &+2|\beta_n||\gamma_n|\frac{(2N)!}{N!2^{2N}}\left[\frac{\sqrt{n(n-1)\cdots 3}N!}{(n-2)!(N-n/2)!2^{-n/2+1}}\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{n\sqrt{n!}N!}{n!(N-n/2)!2^{-n/2}}+\frac{\sqrt{n!}N!}{n!(N-n/2-1)!2^{2N-n/2}}\Big]\cos\Delta\varphi_{2n} \tag{3.23}$$

将此式同$(2N)!/(N!2^{2N})$ 相比，不难知道若(3.23) 小于$(2N)!/(N!2^{2N})$ 那么必有

$$|\beta_n|^2(2N^2+2N)+|\gamma_n|^2\sum_{\gamma=max(0,N-n)}^{N-1}\frac{N!2^N n!}{\gamma!2^\gamma[(n-\gamma)!]^2(n-N+\gamma)!}$$

$$8-2|\alpha_n||\beta_n|(\sqrt{2}N)\cos\Delta\varphi_{02}-2|\alpha_n||\gamma_n|\frac{N(N-1)\cdots(N-n/2+1)}{\sqrt{n!}2^{-n/2}}\cos\Delta\varphi_{0n}$$

$$-2|\beta_n||\gamma_n|\Big[\frac{\sqrt{n(n-1)\cdots 3}N!}{(n-2)!(N-n/2)!2^{-n/2+1}}+\frac{n\sqrt{n!}N!}{n!(N-n/2)!2^{-n/2}}$$

$$+\frac{\sqrt{n!}N!}{n!(N-n/2-1)!2^{2N-n/2-1}}\Big]\cos\Delta\varphi_{2n} \tag{3.24}$$

由(3.24) 不难看出，只要 $\Delta\varphi_{02},\Delta\varphi_{0n}$ 选在区间$[2l\pi+\pi/2,2l\pi+(3/2)\pi]$(其中 l 为整数) 之中，使得 $|\alpha_n|$ 充分大于 $|\beta_n|$ 和 $|\gamma_n|$，(3.24) 式就能够被满足，也就是说态 $|\psi_n\rangle$ 能够存在高阶压缩。

前面的论证表明，光场真空态、双光子 Fock 态和 $n(n>3)$ 光子 Fock 态的迭加态，在 $n=2m$ 时能够存在高阶压缩效应。本文又找到了一类新的具有高阶压缩效应的非经典光场。

参　考　文　献

1 K. Wodkiemicz *et al.*, *Phys. Rev. A*, **35**, 2567(1987)
2 马爱群 *et al.*，哈尔滨工业大学学报，(1)，32(1991)
3 夏云杰 *et al.*，量子电子学，**5**(3)，202(1988)
4 郭光灿 著，量子光学，高等教育出版社，1990，593