

双光子 Jaynes-Cummings 模型与压缩真空态辐射场的一般相互作用

徐明

(西北大学物理系, 西安 710069)

周沧涛

(北京应用物理与计算数学研究所)

摘要: 本文考虑到失谐量及初始原子相干性。讨论了双光子 Jaynes-Cummings 模型与由 $SU(1, 1)$ 相干态所描述的压缩真空态辐射场的一般相互作用。得到了任意分布的二能级原子与任意单模场相互作用中场的密度算符的一般表达式。计算了平均光子数及场的正交分量的方差。详细研究了各种条件下系统的压缩行为。

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 压缩真空态, 失谐, 初始原子相干性

General interaction of two-photon Jaynes-Cummings model with squeezed vacuum

Xu Ming

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an)

Zhou Gangtao

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

Abstract: Considering the detuning and the initial atomic coherence, we study the squeezed field described as an $SU(1, 1)$ coherent state interacting with the two-photon Jaynes-Cummings model and obtain a general expression of the field density operator, study the evolution of the mean photon number and the variance of the field quadratures with particular regard to various conditions for squeezing.

Key words: Jaynes-Cummings model, squeezed vacuum, detuning, initial atomic coherence

一、引言

单模辐射场与理论及实验上都很有意义的 Jaynes-Cummings 模型 (缩写为 JCM)^[1] 相互作用过程中的压缩效应是目前量子光学领域中一个引人注目的课题。文献 [2, 3] 及其引用的一些文章中, 主要讨论了单光子 JCM 与单模真空场及相干场相互作用中压缩态的产生问题, Wodkiewicz^[3] 还讨论了 JCM 与双光子场的互作用, Gerry^[4] 讨论了压缩真空场与双光

子 JCM 的相互作用, 结果表明, 初始压缩在相互作用过程中先是消失, 而在随后的某些时刻又能重新出现。但在 Gerry 的文章中, 原子初态为激发态, 没有考虑到初始原子的相干性, 且辐射场与原子间的作用为共振相互作用, 没有考虑到非共振情形。由于原子的相干性及失谐量是实际系统所真实存在的, 因而研究它们对压缩行为的影响就很有必要。

本文利用双光子 JCM 的演化算符, 计及失谐量及初始原子的相干性, 得到了场的密度矩阵的一般形式, 研究了压缩真空场与双光子 JCM 相互作用中, 各种因素对压缩行为的影响。

二、双光子 JCM 的一般理论

双光子 JCM 的哈密顿量^[5]为

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \sigma_3) + \frac{\hbar}{2} \Delta\sigma_3 + \hbar\lambda(a^2\sigma_+ + a^{\dagger 2}\sigma_-) \quad (1)$$

式中 a 及 a^\dagger 为单模场的湮灭、产生算符, σ_3 和 σ_\pm 为二能级原子的泡利矩阵, λ 是耦合常数, $\Delta = \omega_0 - 2\omega$ 为失谐量, ω_0 为二能级原子的频率间隔, ω 为单模场频率。

对(1)式中各算符做如下代换

$$K_+ = \frac{1}{2} a^{\dagger 2}, K_- = \frac{1}{2} a^2, K_0 = \frac{1}{2} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

则(1)式可重写为

$$H = \hbar\omega N_0 + \hbar O \quad (3)$$

其中

$$N_0 = 2K_0 - \frac{1}{2} + \sigma_3 \quad (4)$$

$$O = 2\lambda(K_+\sigma_- + K_-\sigma_+) + \frac{\Delta}{2} \sigma_3 \quad (5)$$

容易验证以下对易关系:

$$[H, N_0] = [N_0, O] = [H, O] = 0 \quad (6)$$

从而系统的演化算符可以分解为

$$u(t, 0) = e^{-i\omega N_0 t} \cdot e^{-iO t} \quad (7)$$

其中等式右边第二个因子 $e^{-iO t} = u_I(t, 0)$ 为相互作用表象中的演化算符, 在二能级原子的二维子空间中可表示为

$$u_I(t, 0) = \begin{bmatrix} \cos \lambda t \sqrt{\nu} - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} & -2ik_- \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \\ -\frac{2ik_+ \sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} & \cos \lambda t \sqrt{\nu'} + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\delta = \Delta/\lambda, \nu = 4K_-K_+ + \frac{\delta^2}{4}, \nu' = 4K_+K_- + \frac{\delta^2}{4} \quad (9)$$

从而任意时刻辐射场的约化密度算符为

$$\rho_f(t) = T_{\text{r atom}} \left[u_I(t, 0) \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} \otimes \rho_f(0) u_I^\dagger(t, 0) \right] \quad (10)$$

其中 $\rho_f(0)$ 为场的初始密度算符, $\rho_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = a, b)$ 为初始原子密度矩阵的矩阵元, 由于要考虑初始原子相干性, 我们保留了所有四个矩阵元。假定原子处于纯态, 则

$$\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1, \quad \rho_{ab} = \pm |\rho_{ab}| \exp(i\phi_{ab}) = \pm \sqrt{\rho_{aa}(1-\rho_{aa})} \exp(i\phi_{ab}) \quad (11)$$

我们不难做出(10)式的求迹运算而得到

$$\begin{aligned} \rho_f(t) = & \rho_{aa} \left[\left(\cos \lambda t \sqrt{\nu} - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right) \rho_f(0) \left(\cos \lambda t \sqrt{\nu} + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\ & \left. + 4K_{+\nu}^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu} \nu^{-1/2} K_- \right] \\ & + \rho_{bb} \left[\left(\cos \lambda t \sqrt{\nu'} + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \right) \rho_f(0) \left(\cos \lambda t \sqrt{\nu'} - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \right) \right. \\ & \left. + 4K_{-\nu'}^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \nu'^{-1/2} K_+ \right] \\ & + 2i\rho_{ab} \left[\left(\cos \lambda t \sqrt{\nu} - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right) \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \nu'^{-1/2} K_+ \right. \\ & \left. - K_{+\nu}^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \left(\cos \lambda t \sqrt{\nu'} - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \right) \right] \\ & + 2i\rho_{ba} \left[\left(\cos \lambda t \sqrt{\nu'} + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu'}}{\sqrt{\nu'}} \right) \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu} \nu^{-1/2} K_- \right. \\ & \left. - K_{-\nu'}^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \left(\cos \lambda t \sqrt{\nu} + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda t \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

此式是双光子 JCM 量子统计理论的一般结果, 它的一般性表现在原子可以处在基态或激发态, 而且还可以是任意分布的态; 辐射场可以是真空态、相干态、压缩态、甚至是新近提出的多光子压缩态^[6], 由(12)式出发, 可以计算场的平均光子数、光子数方差、场的正交分量的方差等一系列的量子统计性质。下面主要讨论双光子 JCM 与压缩真空态相互作用中场的正交分量的方差的时间演化。

三、双光子 JCM 与压缩真空态的相互作用

取定初始辐射场为由 $SU(1, 1)$ 相干态所描述的压缩真空态^[4]:

$$|\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{-1/4} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{m! \Gamma(\frac{1}{2})} \right]^{1/2} \xi^m |m\rangle \quad (13)$$

这里态 $\{|m\rangle\}$ 是偶光子数态, 即 $|m\rangle$ 态中有 $2m$ 个光子 ($m=0, 1, 2, \dots$), 参量 ξ 与平均光子数的关系是 $|\xi| = [n/(n+1)]^{1/2}$ 且 $\xi = -|\xi|$ 。 $\rho_f(0)$ 表示为

$$\rho_f(0) = |\delta\rangle\langle\xi| \quad (14)$$

将(14)式代入到(12)式得到 $\rho_f(t)$ 的矩阵元

$$\langle m | \rho_f(t) | m' \rangle = \frac{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(m' + \frac{1}{2})}{m! m'!} \right]^{1/2} \xi^m \xi^{*m'}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \rho_{aa} \left[\left(\cos \lambda \omega_{m+1} t - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m+1} t}{\omega_{m+1}} \right) \left(\cos \lambda \omega_{m'+1} t + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m'+1} t}{\omega_{m'+1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 4mm'(\xi\xi^*)^{-1} \frac{\sin \lambda \omega_m t \sin \lambda \omega_{m'} t}{\omega_m \omega_{m'}} \right] \right. \\
& + \rho_{bb} \left[\left(\cos \lambda \omega_m t + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_m t}{\omega_m} \right) \left(\cos \lambda \omega_{m'} t - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m'} t}{\omega_{m'}} \right) \right. \\
& \left. + 4 \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m' + \frac{1}{2} \right) (\xi\xi^*) \left(\frac{\sin \lambda \omega_{m+1} t \sin \lambda \omega_{m'+1} t}{\omega_{m+1} \omega_{m'+1}} \right) \right] \\
& + 2i\rho_{ab} \left[\left(m' + \frac{1}{2} \right) \xi^* \left(\cos \lambda \omega_{m+1} t - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m+1} t}{\omega_{m+1}} \right) \frac{\sin \lambda \omega_{m'+1} t}{\omega_{m'+1}} \right. \\
& \left. - m\xi^{-1} \frac{\sin \lambda \omega_m t}{\omega_m} \left(\cos \lambda \omega_{m'} t - \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m'} t}{\omega_{m'}} \right) \right] \\
& + 2i\rho_{ba} \left[m' \xi^{*-1} \left(\cos \lambda \omega_m t + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_m t}{\omega_m} \right) \frac{\sin \omega_{m'} t}{\omega_{m'}} \right. \\
& \left. - \left(m + \frac{1}{2} \right) \xi \frac{\sin \lambda \omega_{m+1} t}{\omega_{m+1}} \left(\cos \lambda \omega_{m'+1} t + \frac{i\delta}{2} \frac{\sin \lambda \omega_{m'+1} t}{\omega_{m'+1}} \right) \right] \left. \right\} \quad (15)
\end{aligned}$$

其中

$$\omega_{m+1} = \left[4(m+1) \left(m + \frac{1}{2} \right) + \frac{\delta^2}{4} \right]^{1/2} \quad (16a)$$

$$\omega_m = \left[4m \left(m - \frac{1}{2} \right) + \frac{\delta^2}{4} \right]^{1/2} \quad (16b)$$

在(15)式的推导中我们应用了如下关系式

$$K_0 |m\rangle = \left(m + \frac{1}{4} \right) |m\rangle \quad (17a)$$

$$K_+ |m\rangle = \sqrt{(m+1) \left(m + \frac{1}{2} \right)} |m+1\rangle \quad (17b)$$

$$K_- |m\rangle = \sqrt{m \left(m - \frac{1}{2} \right)} |m-1\rangle \quad (17c)$$

首先计算光子数算符 $N = 2K_0 - \frac{1}{2}$ 的平均值:

$$\bar{n}(t) = T_{\text{rfield}} [N \rho_f(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} 2m \langle m | \rho_f(t) | m \rangle \quad (18)$$

然后再计算场的两个正交分量

$$x_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger), \quad x_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) \quad (19)$$

的方差^[4]:

$$\begin{aligned}
(\Delta x_{1,2})^2(t) &= T_{\text{rfield}} \left\{ \rho_f(t) \left[K_0 \pm \frac{1}{2}(K_+ + K_-) \right] \right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(m + \frac{1}{4} \right) \langle m | \rho_f(t) | m \rangle \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m+1) \left(m + \frac{1}{2} \right)} \langle m | \rho_f(t) | m+1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{m \left(m - \frac{1}{2} \right)} \langle m | \rho_f(t) | m-1 \rangle \right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

选取参数组 $(\rho_{aa}, \phi_{ab}, \delta)$ 的不同数值, 由公式(18)及(20)做出 $\bar{n}(\tau)$ 及 $(\Delta x_{1,2})^2(\tau)$ 随时间 $\tau =$

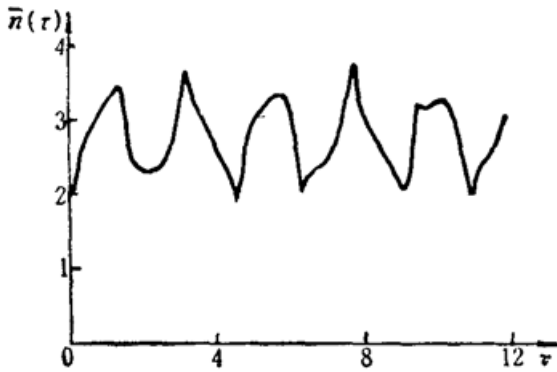


Fig. 1 Time evolution of $\bar{n}(\tau)$ for $\delta=0, \rho_{aa}=1$

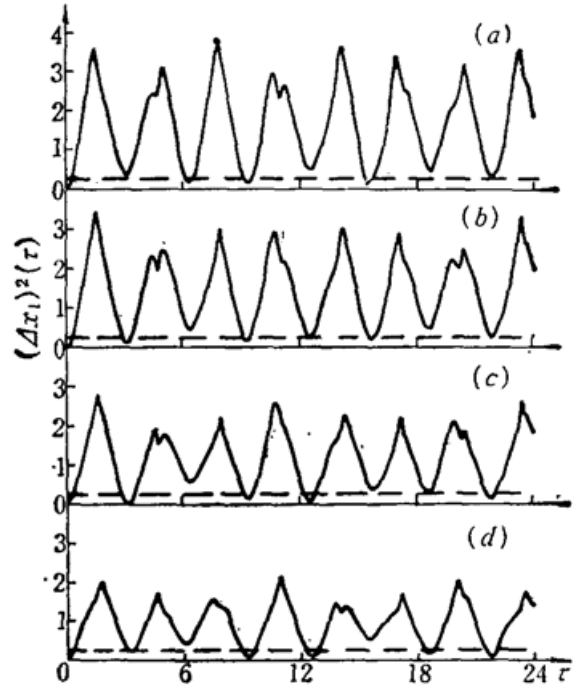


Fig. 2 Time evolutions of $(\Delta x_1)^2(\tau)$ for $\delta=0, \phi_{ab}=\pi/2$ and (a) $\rho_{aa}=1$, (b) $\rho_{aa}=0.7$, (c) $\rho_{aa}=0.3$ (d) $\rho_{aa}=0$

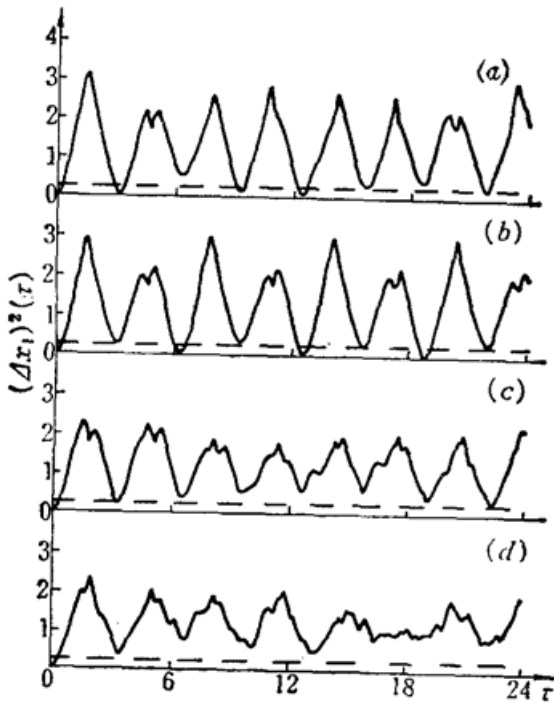


Fig. 3 Time evolutions of $(\Delta x_1)^2(\tau)$ for $\rho_{aa}=0.5, \phi_{ab}=\pi/2$ and (a) $\delta=0$, (b) $\delta=1$, (c) $\delta=3$, (d) $\delta=5$

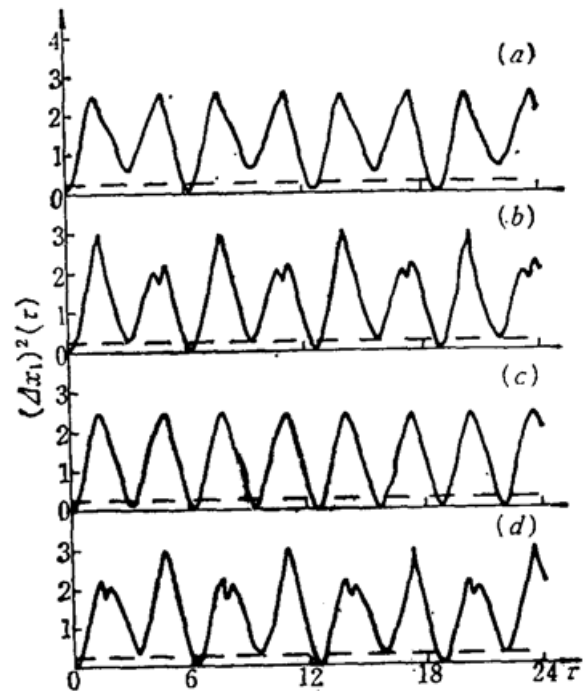


Fig. 4 Time evolutions of $(\Delta x_1)^2(\tau)$ for $\rho_{aa}=0.5, \delta=1$ and (a) $\phi_{ab}=0$, (b) $\phi_{ab}=\pi/2$, (c) $\phi_{ab}=\pi$, (d) $\phi_{ab}=3\pi/2$

λt 变化的曲线, 如图 1~4 所示。图 1 为 $\delta=0$ 和 $\rho_{aa}=1$ 时 $\bar{n}(\tau)$ 的变化曲线, 如 Gerry^[4] 指出, $\bar{n}(\tau)$ 的表观上的无规行为类似于热辐射场中原子反转算子平均值的重迭的塌陷与复活。在所有的计算中, 我们取 $|\xi|=0.8$ 。

图 2~4 为各种参量条件下场方差 $(\Delta x_1)^2(\tau)$ 的时间演化曲线。图中的虚线为 $(\Delta x_1)^2=1/4$,

当曲线位于虚线以上时,表示 x_1 分量无压缩,当曲线位于虚线以下时,则 x_1 分量有压缩。图 2~4 的一个共同点是:大多数情况下(δ 值较大时除外),初始压缩先是消失,而在随后的某些时刻又能重新出现。但是随着参量的改变,压缩出现的时刻及压缩的幅度又有明显的不同。由于初始压缩相同,下面的讨论只限于随后出现的压缩。图 2 是 $\delta=0$, $\phi_{ab}=\pi/2$, 改变 ρ_{aa} 的值时 $(\Delta x_1)^2(\tau)$ 的时间演化。由图可见,最佳压缩既不出现在初始原子为激发态($\rho_{ba}=1$)时,也不出现在基态($\rho_{aa}=0$),而是出现在 $\rho_{aa}=0.3$ 附近。图 3 为 $\rho_{aa}=0.5$, $\phi_{ab}=\pi/2$, 改变 δ 的值得到的方差 $(\Delta x_1)^2(\tau)$ 的时间演化。值得注意的是,最佳压缩并不出现在共振相互作用时(即 $\delta=0$),而是出现在 $\delta=1$ 附近。但当 δ 增大到 3 时,压缩已明显减小,而当 $\delta=5$ 时,压缩消失。图 4 为 $\rho_{aa}=0.5$, $\delta=1$ 时不同的 ϕ_{ab} 对压缩行为的影响。有趣的是 ϕ_{ab} 对压缩幅度几乎无影响,但可以显著地改变压缩效应在时间轴上的分布,当 $\delta=\pi$ 时,方差几乎呈周期性变化,压缩出现的次数也最多。

四、结 论

我们得到了双光子 JCM 中场的密度算符的一般表达式。由此可以计算任意分布的二能级原子与任意单模场的双光子作用中场的量子统计性质。着重讨论了双光子 JCM 与压缩真空态相互作用中场的压缩行为。结果表明,1)场的初始压缩先是消失,而在后来的某些时刻又能重新出现;2)压缩的幅度受到 ρ_{aa} 及 δ 的影响;3)原子相角 ϕ_{ab} 对压缩出现的区间在时间轴上的分布有影响。

有关双光子过程的实验研究已取得很大进展^[7],有良好的应用前景。本文为在这类实验装置上观察辐射场噪声的抑制和压缩提供了一定的理论说明,具有一定的实际意义。

感谢与顾樵博士的有益讨论及邵成辉先生的热忱帮助。

参 考 文 献

- 1 E. T. Jaynes *et al.*, *IEEE*, **51**, 89(1963)
- 2 F. X. Zhao *et al.*, *Phys. Lett.*, **137A**, 479(1989)
- 3 K. Wódkiewicz *et al.*, *Phys. Rev.*, **A35**, 2567(1987)
- 4 C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A37**, 2683(1988)
- 5 K. Wódkiewicz *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**, 458(1985)
- 6 J. Katriel *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**, 1728(1987)
- 7 M. Brune *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1899(1987); *Phys. Rev.*, **A36**, 3771(1987)