

# 双相关函数确定超短脉冲形状

张行愚

(山东大学光学系, 济南 250100)

张包铮 林美荣

(南开大学物理系, 天津 300071)

**提要:** 本文给出一种由实测二阶和单延迟三阶相关函数或单延迟三阶和四阶相关函数经直接运算确定超短脉冲形状的方法。

**关键词:** 相关函数, 脉冲形状

## Determination of ultrashort light pulse shape by two intensity correlations

*Zhang Xingyu*

(Optics Department, Shandong University, Jinan)

*Zhang Baosheng, Lin Meirong*

(Physics Department, Nankai University, Tianjin)

**Abstract:** This paper presents a method for the determination of ultrashort light pulse shape by 2nd-order and single-delay 3rd-order intensity correlations or by single-delay 3rd-order and 4th-order intensity correlations.

**Key words:** intensity correlation, pulse shape

### 一、引言

利用相关函数测量超短光脉冲的宽度和形状<sup>[1~6]</sup>是一种行之有效的方法,在 fs 量级,相关方法目前是唯一方法。为了从相关函数恢复原脉冲形状,传统的方法<sup>[1,2,4~6]</sup>是先假设脉冲形状,然后用理论形状的相关函数与实验相关函数进行拟合,以得到脉冲的近似形状,这种方法因为在计算过程中,只是在有限的若干点上进行拟合,得到的结果往往不能准确地反映实际脉冲的情况。文献[3]给出了用单延迟三阶和四阶相关函数经直接运算确定超短脉冲形状的一级近似结果,但其恢复脉冲的精度受实际脉冲不对称性的影响,当实际脉冲对称性较大时,一级近似结果基本反映实际脉冲情况,而当实际脉冲对称性较小时,一级近似结果精度下降。本文给出一种由实测二阶和单延迟三阶相关函数或单延迟三阶和四阶相关函数确定超短脉冲形状的方法,这种方法同文献[3]方法一样,无需假设脉冲形状,而是用平滑后的实验曲线直接进行运算,并能给出高级近似结果,其精度不受实际脉冲不对称性的影响。

## 二、原 理

为了明确地讨论问题,我们先考虑一种假想情况,假如能够测量超短光脉冲  $I(t)$  的单延迟  $n$  阶相关函数:

$$T_n(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I^{n-1}(t) I(t-\tau) dt, \quad (1)$$

而且  $n$  很大,以至于  $n \rightarrow \infty$ , 那么  $I^{n-1}(t)$  将成为  $\delta$  函数,  $I^{n-1}(t)$  与  $I(t)$  的相关实际上成了  $I^{n-1}(t)$  对  $I(t)$  取样,即

$$T_\infty(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) I(t-\tau) dt = I(-\tau), \quad (2)$$

$T_\infty(\tau)$  将直接反映脉冲  $I(t)$  的情况。

而在实际的实验中,很难使  $n$  值很大。

用混频法可以测量超短光脉冲  $I(t)$  的二阶和单延迟三阶相关函数<sup>[1,2]</sup>:

$$T_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I(t-\tau) dt, \quad (3)$$

$$T_3(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) I(t-\tau) dt, \quad (4)$$

二阶相关函数  $T_2(\tau)$  丢掉了脉冲  $I(t)$  的对称性信息,单独利用  $T_2(\tau)$  只能得到一个对称的脉冲。对于单延迟三阶相关函数  $T_3(\tau)$ , 它是(1)式  $n=3$  的情况,  $I^2(t)$  比  $I(t)$  窄  $\sim \sqrt{2}$  倍<sup>[1]</sup>, 一方面,  $I^2(t)$  不是  $\delta$  函数,  $T_3(\tau)$  不能认为是  $I^2(t)$  对  $I(t)$  的取样; 而另一方面, 因为  $I^2(t)$  比  $I(t)$  窄, 在  $I^2(t)$  与  $I(t)$  的相关中,  $I^2(t)$  比  $I(t)$  所起的作用要小, 若将一个不精确的脉冲(记为  $I_N(t)$ ) 平方后代替(4)式积分号内第一项  $I^2(t)$ , 把第二项  $I(t)$  作为待求量, 那么由  $T_3(\tau)$  和  $I_N^2(t)$  确定的脉冲将比  $I_N(t)$  更接近实际脉冲, 所以, 本文给出的由二阶和单延迟三阶相关函数确定超短脉冲形状的方法为:

1. 先由二阶相关函数  $T_2(\tau)$  得到一对称脉冲, 做为实际脉冲的零级近似, 记为  $I_0(t)$ 。

对(3)式做傅里叶变换, 得

$$\mathcal{F}[T_2(\tau)] = \mathcal{F}[I_0(t)] \cdot \mathcal{F}^*[I_0(t)], \quad (5)$$

其中  $\mathcal{F}$  表示傅里叶变换,  $*$  表示共轭, 考虑到  $I_0(t)$  对称,  $\mathcal{F}[I_0(t)]$  只有实部, 所以有

$$\mathcal{F}[I_0(t)] = \mathcal{F}^*[I_0(t)] \quad (6)$$

$$\mathcal{F}[T_2(\tau)] = \{\mathcal{F}[I_0(t)]\}^2 \quad (7)$$

$$I_0(t) = \mathcal{F}\{\sqrt{\mathcal{F}[T_2(\tau)]}\} \quad (8)$$

2. 将(4)式积分号内第一项由  $I_0^2(t)$  代替, 把后一项  $I(t)$  做为待求量, 那么由  $T_3(\tau)$  和  $I_0^2(t)$  求得的脉冲将比  $I_0(t)$  更接近实际脉冲, 可做为实际脉冲的一级近似, 记为  $I_1(t)$ , 则有

$$T_3(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0^2(t) I_1(t-\tau) dt, \quad (9)$$

对(9)式做傅里叶变换, 并进行适当运算, 可得

$$I_1(t) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^*[T_3(\tau)]/\mathcal{F}^*[I_0^2(t)]\} \quad (10)$$

3. 将  $I_1^2(t)$  再次代入(4)式, 则可求得二级近似  $I_2(t)$ :

$$I_2(t) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^*[T_3(\tau)]/\mathcal{F}^*[I_1^2(t)]\} \quad (11)$$

依次类推,可以得到脉冲的  $m$  级近似:

$$I_m(t) = \mathcal{F} \{ \mathcal{F}^* [T_3(\tau)] / \mathcal{F}^* [I_{m-1}^2(t)] \}. \quad (12)$$

用克尔快门可以测量超短光脉冲  $I(t)$  的单延迟三阶和四阶相关函数  $T_3(\tau)$  和  $T_4(\tau)$ <sup>[3,4]</sup>, 文献[3]给出了由单延迟四阶相关函数  $T_4(\tau)$  获得的对称脉冲(即零级近似  $I_0(t)$ ) 和将  $I_0^2(t)$  代入(4)式求得的脉冲(即一级近似  $I_1(t)$ ), 我们只要将  $I_1^2(t)$  再次代入(4)式就可求得二级近似  $I_2(t)$ , 同理, 也可以求得  $m$  级近似  $I_m(t)$ , 当实际脉冲不对称性较大时, 高级近似将有较高的精度。

随着近似级数  $m$  的增大,  $I_m(t)$  越来越接近实际脉冲, 而且  $I_m(t)$  和  $I_{m-1}(t)$  的差距也越来越小, 我们用参量  $H_m$  来判断当  $m$  达到多大时,  $I_m(t)$  已接近于实际脉冲,  $H_m$  定义为

$$H_m = \int_{-\infty}^{+\infty} [I_m(t) - I_{m-1}(t)]^2 dt, \quad (13)$$

在计算机计算中,  $t$  取分立值  $t_i$ , 则

$$H_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [I_m(t_i) - I_{m-1}(t_i)]^2, \quad (14)$$

其中  $N$  为计算时所取的点数, 当  $H_m$  小到一定程度或  $H_m$  随着  $m$  的变化趋于稳定时(表明实测相关函数的误差使得  $H_m$  不能再减小, 更高级近似不会更接近实际脉冲), 认为恢复脉冲已基本接近实际脉冲。

### 三、模拟计算

为了验证以上方法的可行性, 我们对指数型脉冲进行模拟计算, 设

$$I(t) = \begin{cases} \exp(t/\delta) & t < 0 \\ \exp(-t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (0 < \delta \leq 1) \quad (15)$$

当  $\delta \rightarrow 0$  时表示脉冲完全非对称, 当  $\delta = 1$  时表示脉冲完全对称。我们把由(15)式表示的脉冲称为理论脉冲, 记为  $I_T(t)$ , 相应的宽度(FWHM)记为  $W_T$ , 相应的对称性(脉冲峰值左右两边宽度之比)记为  $\Delta_T$ ; 把  $I_T(t)$  分别代入(3), (4)可求得它的相关函数  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$ , 根据上述原理用  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$  经直接运算得到的脉冲的各级近似分别记为  $I_{R0}(t)$ ,  $I_{R1}(t)$ ,  $I_{R2}(t) \dots$ , 相应的宽度分别记为  $W_{R0}$ ,  $W_{R1}$ ,  $W_{R2} \dots$ , 相应的对称性分别记为  $\Delta_{R0}$ ,  $\Delta_{R1}$ ,  $\Delta_{R2} \dots$ , 将恢复脉冲与理论脉冲进行比较。结果示于图 1。

图 2 给出了  $W_{R1}/W_T$  和  $W_{R3}/W_T$  随  $\delta$  的变化关系。图 3 给出了  $\Delta_{R1}/\Delta_T$  和  $\Delta_{R3}/\Delta_T$  随  $\delta$  的变化关系。表 1 给出了当  $\delta = 0.5$  时  $H_m$  随  $m$  的变化关系。表 2 给出了使  $H_m < 10^{-4}$  和  $H_m < 10^{-5}$  时, 对不同的  $\delta$ , 所需要计算的近似级数。

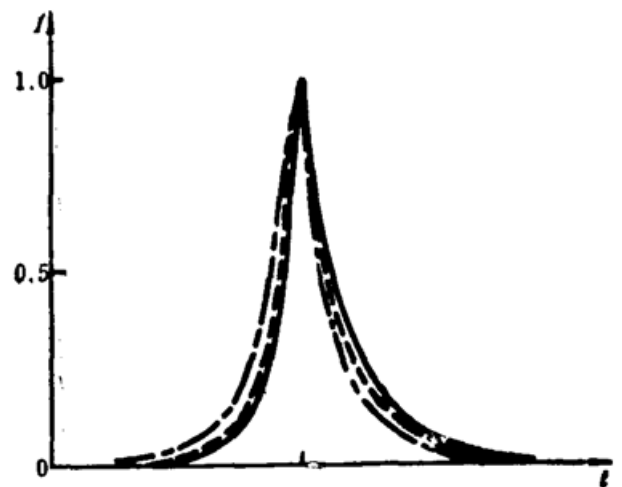


Fig. 1 The pulse shape determined by the 2nd-order and single delay 3rd-order intensity correlations when  $\delta = 0.5$   
—  $I_T(t)$ ; - - -  $I_{R0}(t)$ ; ····  $I_{R2}(t)$

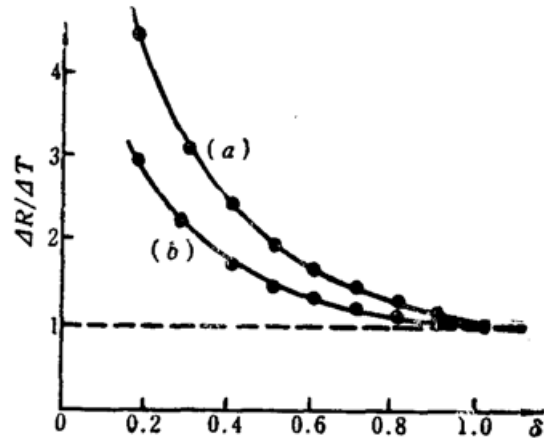
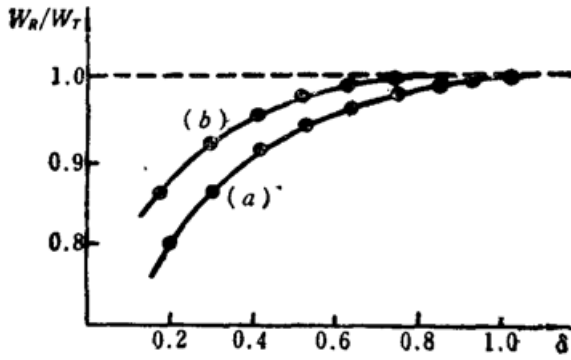


Fig. 2 The dependence of  $W_R/W_T$  on factor  $\delta$   
(a) The first order result; (b) The third order result

Fig. 3 The dependence of  $\Delta R/\Delta T$  on factor  $\delta$   
(a) The first order result; (b) The third order result

Table 1 The variation of factor  $H_m$  along with  $m$  when  $\delta=0.5$

$m$	1	2	3	4	5	6
$H_m$	$4.75 \times 10^{-4}$	$8.01 \times 10^{-5}$	$2.18 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-5}$	$6.86 \times 10^{-6}$	$6.81 \times 10^{-6}$

Table 2 The variation of needed  $m$  along with  $\delta$  when  $H_m < 10^{-4}$   
or  $H_m < 10^{-5}$  is obtained

$\delta$		1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	$\rightarrow 0$
$m$	$H_m < 10^{-4}$	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3
	$H_m < 10^{-5}$	0	1	2	3	3	4	6	8	9	9	9

同理我们可以求得理论脉冲  $I_T(t)$  的单延迟三阶和四阶相关函数  $T_3(\tau)$  和  $T_4(\tau)$ ，并由此来恢复脉冲，结果证明：用单延迟三阶和四阶相关函数  $T_3(\tau)$  和  $T_4(\tau)$  恢复的脉冲的情况与用二阶和单延迟三阶相关函数  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$  恢复的脉冲情况完全类似。

从图 1、图 2、图 3 和表 1、表 2 可以看出，对于同一级近似，理论脉冲越不对称，恢复脉冲越偏离理论脉冲，而对于同一个对称性脉冲，高级近似比低级近似更接近理论脉冲，因此，理论脉冲越是不对称，就越需要高级近似才能接近理论脉冲，可由  $H_m$  的大小来判定恢复脉冲的精度。

### 四、实例运算

文献 [3] 给出了用克尔快门测得的 Nd:YAG 被动锁模激光脉冲 (脉宽  $\sim 78$  ps) 的单延迟三阶和四阶相关函数，并给出恢复脉冲的一级近似结果，我们继续计算高级近似，得到  $H_m$  随  $m$  的变化如表 3 所示，表 3 表明，当  $m \geq 2$  时， $H_m$  趋于稳定，而且都比  $H_1$  明显地小，说明  $m \geq 2$  时的高级近似与一级近似  $I_1(t)$  [3] 差别不大，即一级近似  $I_1(t)$  就能基本反映实际脉冲的情况。比较表 1 和表 3 还可以看出：由于实测相关函数数字的离散性，其  $H_m$  值要比同理论曲线计算时大得多。

文献 [1] 给出了用混频法测得的 Nd:YAG 被动锁模激光脉冲 (脉宽  $\sim 27$  ps) 的二阶和单延迟三阶相关函数  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$ ，并用传统方法求得脉冲可近似表示为高斯-指数形，我们

Table 3 The variation of factor  $H_m$  along with  $m$

$m$	1	2	3	4	5
$H_m$	$1.35 \times 10^{-3}$	$3.99 \times 10^{-4}$	$3.60 \times 10^{-4}$	$3.55 \times 10^{-4}$	$3.50 \times 10^{-4}$

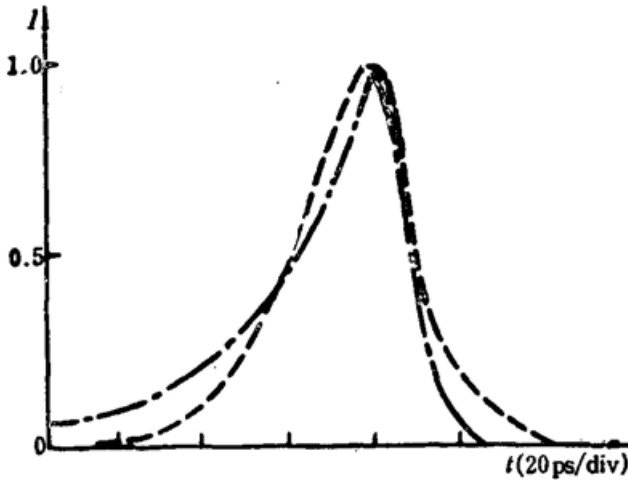


Fig. 4 The pulse shapes  
 ---- $I_R(t)$ ; - · - · - $I_{TR}(t)$

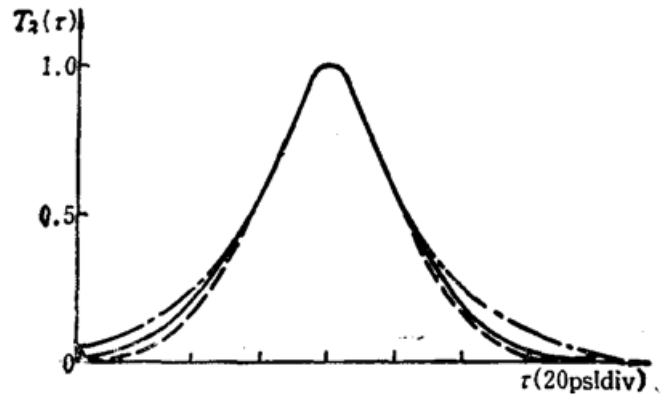


Fig. 5 The second-order intensity correlation  
 — Experimental curve; ---- The curve calculated with  $I_R(t)$ ; - · - · - The curve calculated with  $I_{TR}(t)$

用本文方法对  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$  进行编程运算, 根据  $H_m$  随  $m$  的变化取二级近似, 所求得的脉冲如图 4 所示, 其中虚线为用本文方法求得的脉冲, 记为  $I_R(t)$ , 点虚线为文献[1]用传统方法求得的脉冲, 记为  $I_{TR}(t)$ , 图 4 表明  $I_R(t)$  与  $I_{TR}(t)$  有一定的差距。

为了比较  $I_R(t)$  和  $I_{TR}(t)$  那一个更接近实际情况, 分别计算  $I_R(t)$  和  $I_{TR}(t)$  的二阶和单延迟三阶相关函数  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$ , 并与实测相关函数进行比较, 如图 5、图 6 所示,  $I_R(t)$  的相关函数更接近实测相关函数,  $I_{TR}(t)$  的相关函数底部明显宽于实测相关函数。

表 4 给出了实测相关函数的参量与用  $I_R(t)$  和  $I_{TR}(t)$  计算的相关函数的参量之间的比较, 其中  $W^{(2)}$  和  $W^{(3)}$  分别表示  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$  在  $0.5 I_0$

处的宽度,  $W_1^{(2)}$  和  $W_1^{(3)}$  分别表示  $T_2(\tau)$  和  $T_3(\tau)$  在  $0.1 I_0$  处的宽度,  $\Delta^{(2)}$  和  $\Delta_1^{(2)}$  分别表示  $T_2(\tau)$  在  $0.5 I_0$  和  $0.1 I_0$  处峰值两边宽度之比, 从表 4 知, 若仅用  $W^{(2)}/W^{(3)}$ 、 $W_1^{(2)}/W_1^{(3)}$ 、 $\Delta^{(2)}$  和  $\Delta_1^{(2)}$  四个参量拟合实验曲线(文献[1]情况),  $I_{TR}(t)$  的相关函数与实测相关函数符合较好, 这是因为以上四个参量无法把  $I_{TR}(t)$  的相关函数底部明显宽于实测相关函数表现出来, 若再考虑参量  $W_1^{(2)}/W^{(2)}$  和  $W_1^{(3)}/W^{(3)}$ , 就会发现  $I_{TR}(t)$  的相关函数与实测相关函数不是符合得很好, 这说明传统的方法由于在有限点上对实验曲线进行拟合, 得出的结果往往不能很好地反映实际脉冲的情况, 而本文的方法是用整个实测相关函数进行运算, 无以上缺点。

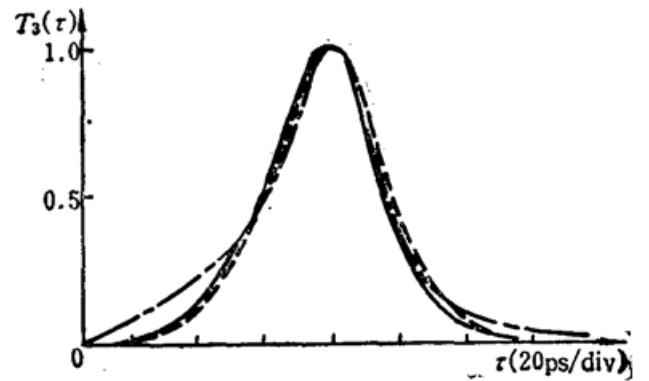


Fig. 6 The third-order intensity correlation  
 — Experimental curve; ---- The curve calculated with  $I_R(t)$ ; - · - · - The curve calculated with  $I_{TR}(t)$

Table 4 The comparison between the factors of experimental curve and that of the correlation calculated with the recovered pulse

	Experimental results	Calculated with $I_{TR}(t)$	Calculated with $I_R(t)$
$W^{(2)}/W^{(3)}$	1.26	1.27	1.26
$W_1^{(1)}/W_1^{(2)}$	1.31	1.30	1.21
$\Delta^{(3)}$	0.7	0.73	0.79
$\Delta_1^{(2)}$	0.77	0.58	0.83
$W_1^{(2)}/W^{(2)}$	2.13	2.54	2.00
$W_1^{(3)}/W^{(3)}$	1.99	2.51	2.12

需要指出的是用上述方法恢复脉冲形状时,要求相关函数是光滑的,为此,对实测相关函数要进行平滑处理。如果计算级数较高,例如  $m \geq 3$ ,那么也要求每级近似结果都经过平滑后再代入(4)式求更高级近似。在实际的运算中,一般一、二级近似就能接近实际脉冲。

### 参 考 文 献

- 1 张肇源 *et al.*, 物理学报, **31**(2), 213(1982)
- 2 刘一先 *et al.*, 中国激光, **14**(1), 5(1987)
- 3 张包铮 *et al.*, 光学学报, **9**(8), 685(1989)
- 4 J. Etchepore *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-19**, 775(1983)
- 5 A. W. Smith *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **15**, 340(1970)
- 6 H. P. Weter *et al.*, *Phys. Rev. A*, **2**, 2074(1970)

(上接第 226 页)

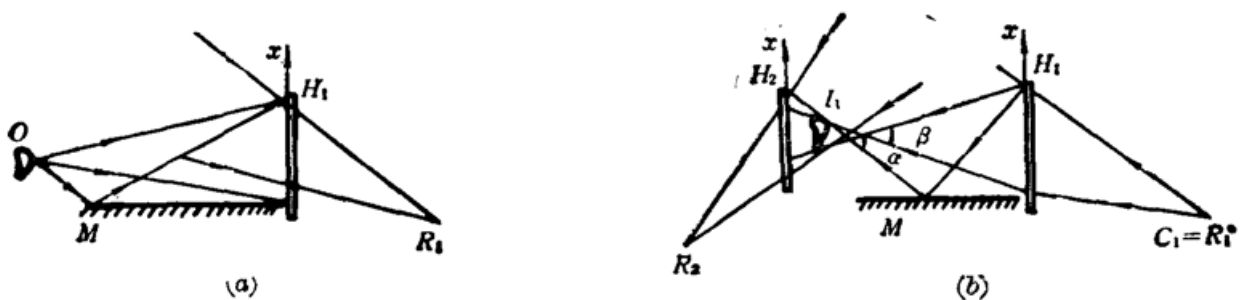


Fig. 6

(a) First-step recording process.  $O$ —object;  $M$ —plane mirror;  $H_1$ —holographic plate;  $R_1$ —reference wave (b) Second-step recording process.  $C_1$ —illuminating wave of  $H_1$ ;  $R_2$ —conjugate reference wave of  $H_1$ ;  $I_1$ —image of  $H_1$ ;  $H_2$ —holographic plate;  $R_2$ —reference wave of  $H_2$

### 参 考 文 献

- 1 F. T. S. Yu, *Optical Information Processing*, John Wiley & Sons, 1983, § 12.2
- 2 R. J. 科利尔, C. B. 伯克哈特等著, 盛尔镇, 孙明经译, 光全息学, 机械工业出版社, 1983, § 13.1, § 13.2.