

# 铜蒸气激光链中激光脉冲的抖动分析

任 虹 梁培辉

(中国科学院上海光机所, 上海 201800)

**提要:** 运用概率论方法导出了铜蒸气激光链中激光脉冲抖动量的表达式, 结果表明: 当铜蒸气激光器并联时, 两台激光器输出光脉冲之间的抖动量的平方等于每台激光器输出光脉冲相对于电触发脉冲抖动量的平方和; 当多台铜蒸气激光器串联放大时, 第 $m$ 台激光器输出光脉冲相对于振荡器输出光脉冲的抖动量随 $m$ 的增加而增加, 但总是小于每台激光器放电脉冲抖动量的 $\sqrt{2}$ 倍。实验结果与理论计算基本相符。

**关键词:** 铜蒸气激光链, 脉冲激光, 抖动

## Analysis of pulse jitter between lasers in copper vapor laser chains

Ren Hong, Liang Peihui

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

**Abstract:** Expressions of the pulse jitter between lasers in copper vapor laser chains are derived basing on the principle of probability. Results show that: the square of the pulse jitter between two copper vapor lasers equals the square summation of each laser pulse jitter relative to electrical trigger pulse when the copper vapor lasers are in parallel; the laser pulse jitter between  $m$ th amplifier and the oscillator increases with  $m$  in an oscillator amplifier chain in series, but the jitter is less than  $\sqrt{2}$  times of the jitter of thyatron discharge pulse if each of the thyatron has the same jitter. Experimental results are in agreement with theoretical predictions.

**Key words:** copper vapor laser chain, pulse laser, jitter

### 一、引 言

铜蒸气激光器(CVL)是一种高重复频率的脉冲激光器, 它一般采用氢闸流管放电, 其导通时间通常是一个连续型的随机变量, 因此无论是作为振荡器还是作为放大器, 每次输出光脉冲出现的时间相对于电触发信号也是一个连续型的随机变量, 我们通过示波器能观察到光脉冲波形具有一定的抖动量, 铜蒸气激光链中光脉冲抖动量的测量已有报道<sup>[1~4]</sup>。本文首先分析了铜蒸气激光振荡器与放大器输出光脉冲产生抖动的机理, 然后运用概率论方法从理论上推导出各种结构组成的铜蒸气激光链中任意两台激光器输出光脉冲之间的抖动量。这一分析结果不仅对 CVL 放大效率<sup>[5,6]</sup> 以及泵浦染料激光器振放系统<sup>[7]</sup> 有重要的意义, 而且这一分析方法也可推广到一般脉冲激光链, 如准分子激光链等。

## 二、振荡器与放大器激光脉冲的抖动分析

无论是 OVL 振荡器还是放大器光脉冲抖动的主要原因是闸流管放电导通时间的离散性;次要原因是气体放电的不稳定。但气体放电的不稳定可通过调整使之较闸流管放电导通时间的离散量小,因此可将光脉冲抖动的起因归结于闸流管放电导通时间的离散性。实验测出的光脉冲抖动量是综合了各种起因产生的抖动量。

分析基于下面三个前提:

1. 每台闸流管放电导通时间  $T$  的概率密度都满足正态分布,可表示为

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = N_t(\mu, \sigma^2) \quad (1)$$

这里  $\mu$  为随机变量  $T$  的数学期望,  $\sigma$  为随机变量  $T$  的均方差,本文以  $\sigma$  作为抖动量。

2. 每台 OVL 的放电闸流管都采用同一电脉冲信号触发。第  $m$  台 OVL 输出光脉冲相对于电触发信号的抖动量用  $\sigma_{m,0}$  表示;第  $m$  台 OVL 相对于第  $l$  台 OVL 输出光脉冲之间的抖动量用  $\sigma_{m,l}$  表示,这里  $m, l$  为激光器的序号,  $m > l$ , 0 代表电触发信号。

3. 每台 OVL 放大器均处于最佳延时状态,即放大器输出的平均功率最大。

对于振荡器(OVL<sub>1</sub>)来说,其输出光相对于电触发信号的抖动量就等于振荡器闸流管放电导通时间相对于电触发信号的抖动量,因此振荡器输出光脉冲峰值即放大器输入光脉冲峰值相对于电触发信号的时间间距  $T_{1,0}$  的概率密度可表示为

$$P_{1,0}(t_{1,0}) = N_{t_{1,0}}(\mu_{1,0}, \sigma_1^2) \quad (2)$$

当放大器(OVL<sub>2</sub>)处于最佳延时时,其闸流管放电脉冲的峰值相对于电触发信号的时间间距为  $T_2$ ,其概率密度可表示为

$$P_2(t_2) = N_{t_2}(\mu_2, \sigma_2^2) \quad (3)$$

$$\text{令 } T_{opt} = \mu_2 - \mu_{1,0}$$

设放大器放电脉冲的峰值时间与输入光脉冲的峰值时间之差用  $H$  表示,即

$$H = T_2 - T_{1,0}$$

$$\text{令 } S = H - T_{opt}$$

当  $S = 0$  时, OVL<sub>2</sub> 处于同步状态,当  $S > 0$  时 OVL<sub>2</sub> 处于欠延时状态;当  $S < 0$  时 OVL<sub>2</sub> 处于过延时状态。在不影响讨论结果的前提下,我们规定

$$\mu_2 = \mu_{1,0} = 0$$

即时间坐标零点都选择在这两个随机变量出现概率最高之处。此时  $T_{opt} = 0$ ,  $H = S$ 。

设放大器输出光脉冲峰值时间与坐标零点之差为  $T_{2,0}$ , 放大器输出光脉冲峰值时间与放大器输入光脉冲的峰值时间之差为  $T_{2,1}$ 。由于  $T_{1,0}$  与  $T_2$  是两个相互独立的连续型随机变量,而  $T_{2,0}$ 、 $T_{2,1}$  又是  $T_{1,0}$ 、 $T_2$  的函数,因此我们求解随机变量  $T_{2,0}$  与  $T_{2,1}$  的概率密度  $P_{2,0}(t_{2,0})$  与  $P_{2,1}(t_{2,1})$ , 实际上就是解两个相互独立的随机变量函数的概率密度。下面我们通过图 1 来寻找  $T_{2,0}$ 、 $T_{2,1}$  与  $T_{1,0}$ 、 $T_2$  的函数关系,从而确定放大器输出光脉冲抖动量的大小。图 1 中 (a)、(b) 是  $T_{1,0}$ 、 $T_2$  随机变化中的两种情况分别对应欠延时与过延时。

$T_{2,1}$  与  $S$  的关系由 OVL 放大器的动力学过程所决定,我们通过对 OVL 放大器简化动力

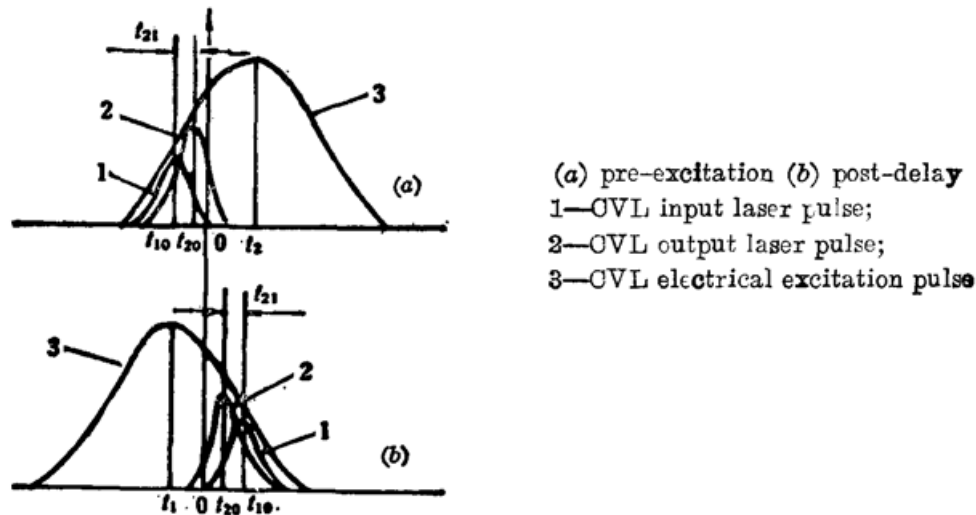


Fig. 1 Schematic of relations among  $T_{2,1}$ ,  $T_{2,0}$  and  $T_{1,0}$ ,  $T_2$

学模型的计算以及实验测量得到: 在  $|S| \leq 20 \text{ ns}$  的范围内,  $T_{2,1}$  与  $S$  近似满足线性关系<sup>[8]</sup>:

$$T_{2,1} = aS \quad 0 \leq a \leq 1 \tag{4}$$

$a$  为畸变系数。(4)式的物理意义是: 当放大器处于欠延时, 其输出光脉冲相对于输入光脉冲前沿变平, 后沿变陡, 峰值后移; 当放大器处于过延时, 其输出光脉冲相对于输入光脉冲前沿变陡, 后沿变平, 峰值前移。对于 OVL 放大器, 其输出光波形相对于输入光波形畸变不大, 下面我们就以峰值时间的抖动量来代表整个脉冲波形的抖动量。由于

$$S = T_2 - T_{1,0}$$

因此

$$T_{2,1} = aS = -aT_{1,0} + aT_2 \tag{5}$$

由图 1(a), (b) 可知: 无论随机变量  $T_{1,0}$  与  $T_2$  取何值,  $T_{2,0}$  必然满足:

$$T_{2,0} = T_{1,0} + T_{2,1} = (1-a)T_{1,0} + aT_2 \tag{6}$$

由(5), (6)式可知: 求随机变量  $T_{2,1}$  及  $T_{2,0}$  的概率密度  $P_{2,1}(t_{2,1})$  及  $P_{2,0}(t_{2,0})$  实际上就是求两个独立的随机变量  $T_{1,0}$  与  $T_2$  的线性函数的概率密度。由附录 1 可知:

$$P_{2,1}(t_{2,1}) = N_{t_{2,1}}(0, \sigma_{2,1}^2) \tag{7}$$

$$\sigma_{2,1}^2 = a^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$P_{2,0}(t_{2,0}) = N_{t_{2,0}}(0, \sigma_{2,0}^2) \tag{8}$$

$$\sigma_{2,0}^2 = (1-a)^2\sigma_1^2 + a^2\sigma_2^2$$

### 三、三种基本排列激光脉冲之间抖动量的分析

多台 OVL 可以组成各种振放链排列, 但无论何种排列都是三种基本排列的组合: (1) 同一触发源的两台 OVL 各自振荡; (2) 多台 OVL 串联放大; (3) 四台 OVL 串并联放大。

#### 3.1 两台 CVL 各自振荡

OVL<sub>1</sub>、OVL<sub>2</sub> 用同一触发源各自振荡。设它们输出光脉冲峰值之间时间间隔为  $T'_{2,1}$ , 显然  $T'_{2,1} = T_2 - T_1$

由前面的分析可知, 每台 OVL 振荡器输出光脉冲相对于电触发信号的时间间距  $T_{1,0}$ 、

$T_{2,0}$  的概率密度可表示为

$$\begin{aligned} P_{1,0}(t_{1,0}) &= N_{t_{1,0}}(0, \sigma_{1,0}^2) = N_{t_{1,0}}(0, \sigma_1^2) \\ P_{2,0}(t_{2,0}) &= N_{t_{2,0}}(0, \sigma_{2,0}^2) = N_{t_{2,0}}(0, \sigma_2^2) \end{aligned}$$

由附录 1 可知:  $T'_{2,1}$  的概率密度  $P'_{2,1}(t'_{2,1})$  为

$$\begin{aligned} P'_{2,1}(t'_{2,1}) &= N_{t'_{2,1}}(0, \sigma_{2,1}'^2) \\ \sigma_{2,1}'^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

即当 CVL 并联时, 两台 CVL 输出光脉冲之间的抖动量的平方等于每台 CVL 输出光相对于电触发信号抖动量的平方和。

### 3.2 多台 CVL 串联放大

设  $m$  台 CVL 串联放大, 其中  $\text{CVL}_1$  为振荡器,  $\text{CVL}_2$  到  $\text{CVL}_m$  为放大器。每台放大器放电脉冲峰值相对于电触发信号的时间间距分别为  $T_2, \dots, T_l, \dots, T_m$ , 它们的概率密度都满足正态分布, 分别为

$$\begin{aligned} P_2(t_2) &= N_{t_2}(0, \sigma_2^2) \\ &\dots\dots \\ P_l(t_l) &= N_{t_l}(0, \sigma_l^2) \\ &\dots\dots \\ P_m(t_m) &= N_{t_m}(0, \sigma_m^2) \end{aligned}$$

根据振荡器的性质有

$$P_{1,0}(t_{1,0}) = N_{t_{1,0}}(0, \sigma_1^2)$$

设第  $l$  台放大器放电脉冲的峰值时间与第  $l-1$  台放大器输出光脉冲的峰值时间之差为  $S_l$ , 则第  $l$  台放大器输出光脉冲的峰值时间与第  $(l-1)$  台放大器输出光脉冲的峰值时间之差  $T_{l,l-1}$  可表示成

$$T_{l,l-1} = T_{l,0} - T_{l-1,0} = aS_l = a(T_l - T_{l-1,0})$$

通过对图 2 的分析可找出  $T_{m,0}$  及  $T_{m,l}$  与随机变量  $T_{1,0}, T_2, \dots, T_l, \dots, T_m$  的函数关系:

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= T_{2,0} - T_{1,0} = aS_2 = -aT_{1,0} + aT_2 \\ T_{2,0} &= T_{1,0} + T_{2,1} = (1-a)T_{1,0} + aT_2 \\ T_{3,2} &= aS_3 = a(T_3 - T_{2,0}) = -aT_{2,0} + aT_3 \\ T_{3,0} &= T_{2,0} + T_{3,2} = (1-a)^2T_{1,0} + a(1-a)T_2 + aT_3 \\ T_{3,1} &= T_{3,0} - T_{1,0} = [(1-a)^2 - 1]T_{1,0} + a(1-a)T_2 + aT_3 \\ T_{m,0} &= T_{m-1,0} + T_{m,m-1} \\ &= T_{m-1,0} + a(T_m - T_{m-1,0}) \\ &= (1-a)[(1-a)T_{m-2,0} + aT_{m-1}] + aT_m \\ &= \dots\dots \\ &= (1-a)^{m-1}T_{1,0} + a(1-a)^{m-2}T_2 + \dots\dots + a(1-a)T_{m-1} + aT_m \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} T_{m,l} &= T_{m,0} - T_{l,0} \\ &= [(1-a)^{m-l} - 1][(1-a)^{l-1}T_{1,0} + a(1-a)^{l-2}T_2 + \dots\dots \\ &\quad + a(1-a)T_{l-1} + aT_l] + a(1-a)^{m-l-1}T_{l+1} + \dots\dots \\ &\quad + a(1-a)T_{m-1} + aT_m \end{aligned} \quad (11)$$

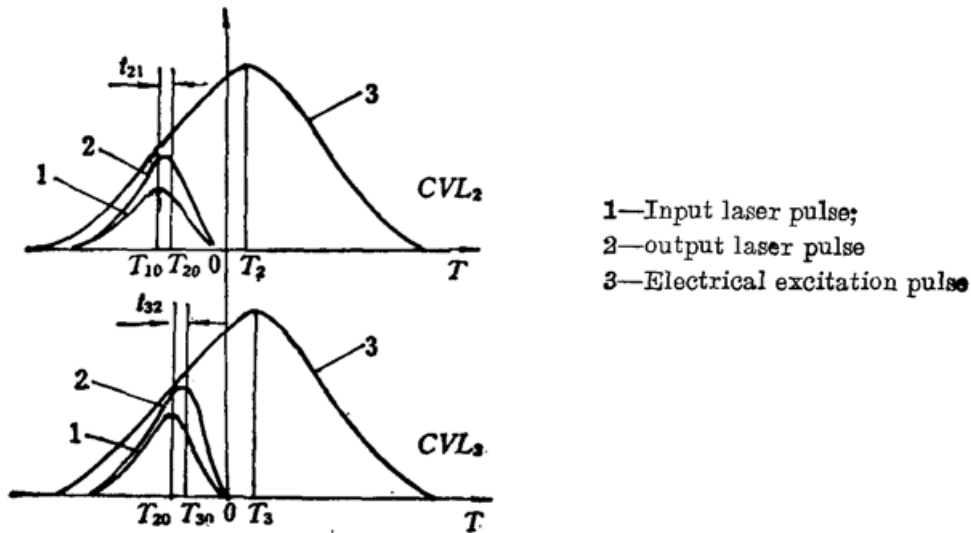


Fig. 2 Schematic of relations among  $T_{3,2}$ ,  $T_{3,1}$ ,  $T_{3,0}$  and  $T_{1,0}$ ,  $T_2$ ,  $T_3$

由于  $T_{1,0}, T_2, \dots, T_l, \dots, T_m$  是相互独立的连续型随机变量, 由附录 1 可得

$$P_{m,0}(t_{m,0}) = N_{t_{m,0}}(0, \sigma_{m,0}^2)$$

$$\sigma_{m,0}^2 = (1-a)^{2(m-1)}\sigma_1^2 + a^2(1-a)^{2(m-2)}\sigma_2^2 + \dots + a^2(1-a)^2\sigma_{m-1}^2 + a^2\sigma_m^2 \quad (12)$$

$$P_{m,l}(t_{m,l}) = N_{t_{m,l}}(0, \sigma_{m,l}^2)$$

$$\sigma_{m,l}^2 = [1 - (1-a)^{m-l}]^2 [(1-a)^{2(l-1)}\sigma_1^2 + a^2(1-a)^{2(l-2)}\sigma_2^2 + \dots + a^2(1-a)^2\sigma_{l-1}^2 + a^2\sigma_l^2] + a^2(1-a)^{2(m-l-1)}\sigma_{l+1}^2 + \dots + a^2(1-a)^2\sigma_{m-1}^2 + a^2\sigma_m^2 \quad (13)$$

讨论 1:

当  $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_m = \sigma$  时, 由(12)式可得

$$\sigma_{m,0}^2 = (1-a)^{2(m-1)}\sigma_1^2 + \frac{a}{2-a} [1 - (1-a)^{2(m-1)}] \sigma^2 \quad (14)$$

由(14)式可看出: (a) 当  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$  时, 第  $m$  台放大器输出光脉冲相对于电触发信号的抖动量与  $m$  无关, 仅随  $a$  的增加而增加; (b) 当  $\sigma_1 < \sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$  时,  $\sigma_{m,0}$  随  $m$  的增加而增加, 并逐渐趋于  $\sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$ ; (c) 当  $\sigma_1 > \sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$  时,  $\sigma_{m,0}$  随  $m$  的增加而减小, 并逐渐趋于  $\sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$ 。

通常  $\sigma_1 = \sigma$ , 由(14)式可得

$$\sigma_{m,0} = \sqrt{\frac{1}{2-a} [a + 2(1-a)^{2(m-1)}]} \sigma \quad (15)$$

图 3 是  $a = 1/2, 1/3, 2/3$  时,  $\frac{\sigma_{m,0}}{\sigma}$  与  $m$  的关系曲线, 它表明第  $m$  台放大器输出光脉冲相对于电触发信号的抖动量  $\sigma_{m,0}$  随放大器台数  $m$  的增加而减小, 最终趋于  $\sqrt{\frac{a}{2-a}} \sigma$ 。

图 4 给出了不同的  $m$  值时,  $\frac{\sigma_{m,0}}{\sigma}$  与  $a$  的关系曲线, 由图 4 可知: 对应于每一个  $m$  值, 都有一个最佳的  $a$  值, 使  $\frac{\sigma_{m,0}}{\sigma}$  最小。

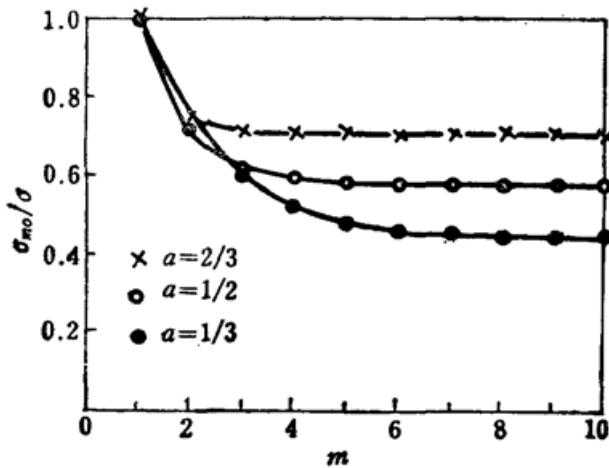


Fig. 3  $\sigma_{m0}/\sigma$  varies with  $m$  at different  $a$

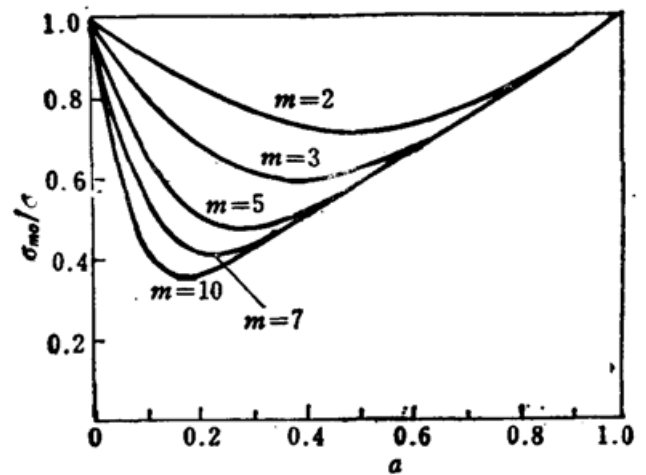


Fig. 4  $\sigma_{m0}/\sigma$  varies with  $a$  at different  $m$

讨论 2:

当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_l = \dots = \sigma_m = \sigma$  时, 由(13)式可得

$$\sigma_{m,l}^2 = \frac{2\sigma^2}{2-a} [1 - (1-a)^{m-l}] [a + (1-a)^{2l-1} - (1-a)^{m+l-1}] \quad (16)$$

(a) 当  $l=1$  时, (16)式可写成

$$\sigma_{m,1}^2 = \frac{2\sigma^2}{2-a} [1 - (1-a)^{m-1}] [1 - (1-a)^m] \quad (17)$$

图 5 为  $\sigma_{m,1}/\sigma$  与  $m$  的关系曲线, 图 5 表明: 第  $m$  台放大器输出光脉冲相对于第一台振荡器输出光脉冲之间的抖动量  $\sigma_{m,1}$  随  $m$  的增加而增加, 最终趋于  $\sqrt{\frac{2}{2-a}} \sigma$ 。图 6 表示  $\sigma_{m,1}/\sigma$  随畸变系数  $a$  的变化规律, 当  $a$  增加时,  $\sigma_{m,1}/\sigma$  也随之增加, 最终趋于  $\sqrt{2}$ ; (b) 当  $m=10$  时, (16) 可写成

$$\sigma_{10,l}^2 = \frac{2\sigma^2}{2-a} [1 - (1-a)^{10-l}] \{a + (1-a)^{2l-1} [1 - (1-a)^{10-l}]\} \quad (18)$$

图 7 表示  $\sigma_{10,l}/\sigma$  随  $l$  的变化规律, 当  $l$  增加时,  $\sigma_{10,l}/\sigma$  单调减小; (c) 通过对(16)式的分析, 各台放大器输出光脉冲之间的抖动量满足下列不等式:

$$\sigma_{m,l-1} > \sigma_{m-1,l-1} > \sigma_{m,l} > \sigma_{m-1,l} > \sigma_{m,l+1} \quad (19)$$

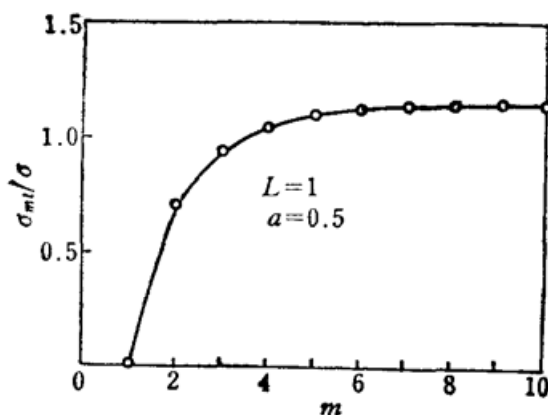


Fig. 5 Curve of  $\sigma_{m1}/\sigma$  with  $m$

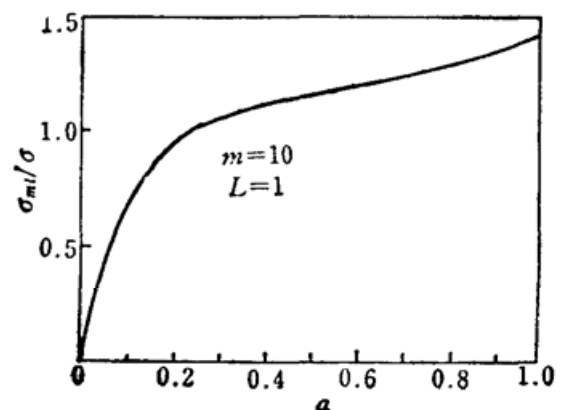


Fig. 6 Curve of  $\sigma_{10,1}/\sigma$  with  $a$

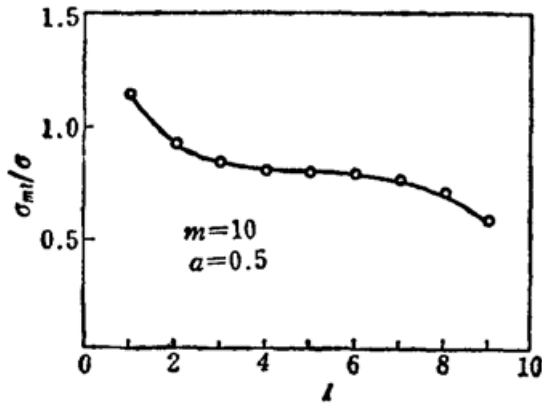


Fig. 7 Curve of  $\sigma_{10,l}/\sigma$  with  $l$

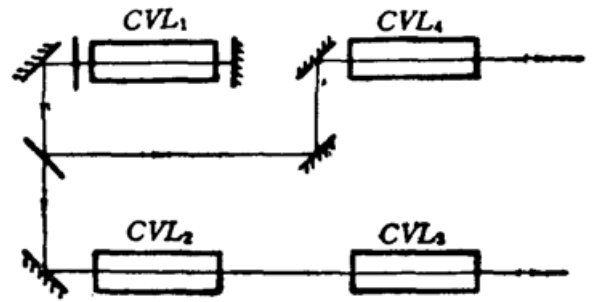


Fig. 8 Schematic of four CVLs series-parallel arrangement

### 3.3 四台 CVL 串并联放大

振荡器  $OVL_1$  的输出光分两路分别通过两台放大器  $OVL_2$ 、 $OVL_3$  以及一台放大器  $OVL_4$ ，其排列如图 8 所示。

由于  $OVL_1$  与  $OVL_2$ 、 $OVL_3$  是串联放大，由(11)式可得

$$T_{3,1} = [(1-a)^2 - 1]T_{1,0} + a(1-a)T_2 + aT_3$$

同理  $OVL_1$  与  $OVL_4$  也是串联放大，因此有

$$T_{4,1} = -aT_{1,0} + aT_4$$

又由于  $OVL_4$  与  $OVL_2$ 、 $OVL_3$  是并联，因此有

$$T_{4,3} = T_{4,1} - T_{3,1} = a(1-a)T_{1,0} + a(1-a)T_2 + aT_3 - aT_4 \tag{20}$$

第 4 台放大器输出光脉冲峰值相对于第 3 台放大器输出光脉冲峰值的时间间距  $T_{4,3}$  的概率密度用  $P_{4,3}(t_{4,3})$  表示，由附录 1 可得

$$P_{4,3}(t_{4,3}) = N_{t_{4,3}}(0, \sigma_{4,3}^2)$$

$$\sigma_{4,3}^2 = a^2(1-a)^2\sigma_1^2 + a^2(1-a)^2\sigma_2^2 + a^2\sigma_3^2 + a^2\sigma_4^2$$

当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma$  时，

$$\sigma_{4,3}^2 = 2a^2[1 + (1-a)^2]\sigma^2 \tag{21}$$

## 四、实验结果

### 4.1 两台 CVL 各自振荡

实验采用两台放电管内径为  $\phi 26$  mm，电极间距为 900 mm 的铜蒸气激光器  $OVL_1$  与  $OVL_2$ ，它们用同一电脉冲信号触发，各自振荡，用 PIN 管接收各自的输出光信号。在重复率为 6 kHz，输入电压为 5.5 kV，电流为 0.6 A，氖气压约 50 Torr 时，从 300 MHz 示波器上测出每台振荡器输出光脉冲相对于电触发信号的抖动量分别为： $\sigma_1 = \pm 1.5$  ns； $\sigma_2 = \pm 3.0$  ns，如图 9(a)、(b) 所示。同时还测出两台振荡器输出光脉冲之间的抖动量  $\sigma'_{2,1} = \pm 3.5$  ns，如图 9(c) 所示。

根据这种 OVL 的性能，取  $a = 0.5^{[8]}$ ，由(9)式可算出： $\sigma'_{2,1} = \pm 3.4$  ns，由此可见理论计算与实验结果吻合得很好。

### 4.2 两台 CVL 一振一放

在上述各种实验条件不变的情况下，将  $OVL_2$  由振荡器改为放大器，在最佳延时条件下，



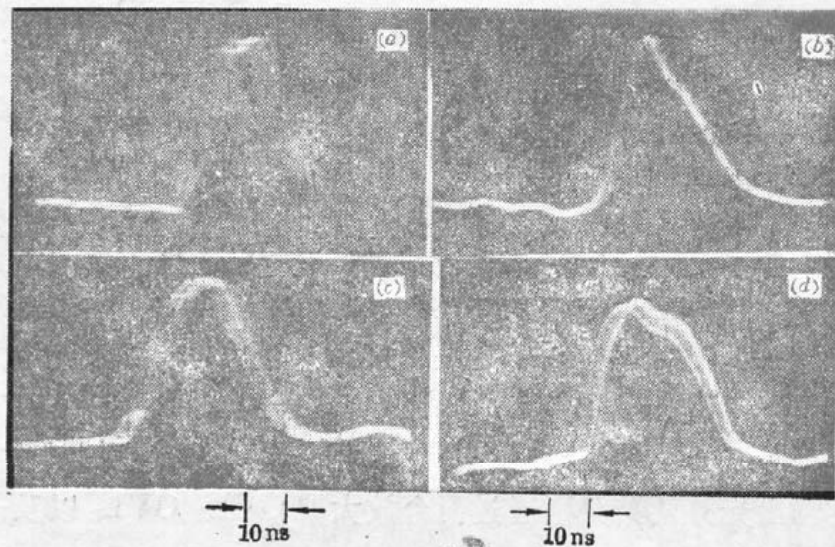


Fig. 9 Laser pulses with jitter

(a), (b) is CVL<sub>1</sub>, CVL<sub>2</sub> output pulses relative to electrical trigger pulse respectively. (c), (d) is CVL<sub>2</sub> output pulse relative to CVL<sub>1</sub> for CVL<sub>2</sub> as an oscillator or amplifier respectively

测出放大器输出光相对于振荡器输出光的抖动  $\sigma_{2,1} = \pm 2.0 \text{ ns}$ , 如图 9(d) 所示。由 (7) 式可算出:  $\sigma_{2,1} = \pm 1.7 \text{ ns}$ , 理论计算与实验结果相近。

#### 4.3 由六台 CVL 组成振放链

用六台结构相同的 CVL 按图 10 排列组成一个串、并联系统, 激光管内径为  $\phi 34 \text{ mm}$ , 电极间距为  $1100 \text{ mm}$ 。在每台激光器输入电功率约为  $3400 \text{ W}$ , 且每台放大器都处于最佳延时的条件下, 测出  $\sigma_{6,4} = \pm 3.5 \text{ ns}$ , 同时也测出每台 CVL 闸流管放电导通时间的抖动量近似相等,  $\sigma \approx \pm 4.5 \text{ ns}$ 。

用上述相同的分析方法可以推导出

$$\sigma_{6,4}^2 = [(1-a)^2 - (1-a)^3]^2 \sigma_1^2 + a^2 [(1-a)^4 \sigma_2^2 + (1-a)^2 \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + (1-a)^2 \sigma_5^2 + \sigma_6^2] \quad (22)$$

当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_6 = \sigma$  时式(22)可表示为

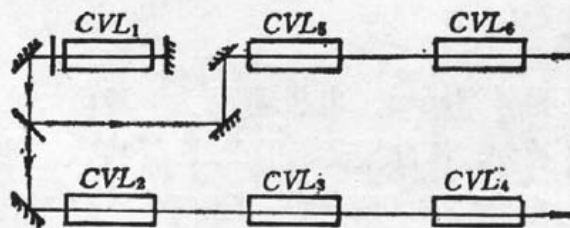


Fig. 10 Schematic of six CVLs series-parallel arrangement

$$\sigma_{6,4} = \sqrt{\frac{2a}{2-a} [1 - (1-a)^6]} \sigma$$

当  $a$  取  $0.5$  时,  $\sigma_{6,4} = \pm 3.6 \text{ ns}$ 。由此可见理论值与实验基本相符。



## 参 考 文 献

- 1 梁培辉 *et al.*, 中国激光, **14**(1), 45 (1987)
- 2 任虹 *et al.*, 中国激光, **17** (1), 1(1990)
- 3 R. S. Hargrove *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-15**(11), 1223(1979)
- 4 E. Fujiwara *et al.* *SPIE*, **1225**, 240 (1990)
- 5 梁培辉 *et al.*, 中国激光, **17**, 激光器件专集(增刊), 50 (1990)
- 6 V. V. Zubov *et al.*, *Sov. J. Quant. Electr.*, **16** (12), 1606 (1986)
- 7 R. S. Hargrove *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-16** (10), 1108 (1980)
- 8 任虹 *et al.*, 中国激光 待发表
- 9 E. C. 温特切勒, 崔明奇译, 概率论, 上海科学技术出版社, 上海, 1961, 381

## 附录 1 相互独立的随机变量的线性函数的概率密度

设随机变量  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  相互独立, 且它们的概率密度都满足正态分布,

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

那么随机变量  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$  的概率密度仍然具有正态分布, 且有<sup>[9]</sup>,

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$