第19卷 第1期
1992年1月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. 19 No. 1
January, 1992

用无透镜傅里叶变换全息进行光学微分

冯 郁 芬
(陕西师范大学，西安 710062)

提要：本文提出用无透镜傅里叶变换全息进行二阶光学微分的新方法，文中给出理论分析及实验结果。

关键词：光学微分，无透镜傅里叶变换全息图，离焦像

Optical differentiation by lensless Fourier transform holograms

Feng Yufen
(Shanxi Teachers University, Xian 710062)

Abstract: This paper presents a new method of optical second order differentiation by lensless Fourier transform hologram. Theoretical analysis and experiemental results are given.

Key words: optical *differentiation*, *lensless Fourier transform hologram*, defocused image

一、引 言

光学微分的方法有两种，第一种方法是在傅里叶变换平面上进行运算，然后取反变换的方法，即根据

$$F\frac{\partial^n g(x, y)}{\partial x^n}=(i2\pi f_x)^n G(f_x, f_y) \tag{1}$$

在频谱平面上放置 $(i2\pi f_x)^2$ 的空间滤波器可以得到二阶光学微分。

另一种方法是差分法，[1]，即

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2}=\lim_{\Delta\to 0}[g(x+\Delta, y)+g(x-\Delta, y)-2g(x, y)]/\Delta \tag{2}$$

(2)式也说明光学微分可以用图像相减的方法来完成。本文提出用无透镜傅里叶变换全息可以进行图像相减和光学微分，并指出物体的准确像与离焦像之差是二维二阶光学微分。

二、理 论 分 析

无透镜傅里叶变换全息的光路如图1所示，记录时物体与参考点源在同一平面上，该平面

收稿日期：1990年8月6日

与全息图平面平行，距离为 z_1，当用平面波 $\exp\frac{jk}{z_1}x_2b$ 照明全息图时，在全息图后面距离 z_1 的 P_3 平面上会得到物光波的傅里叶变换，如图2所示。在 P_4 平面上将得到输出像。

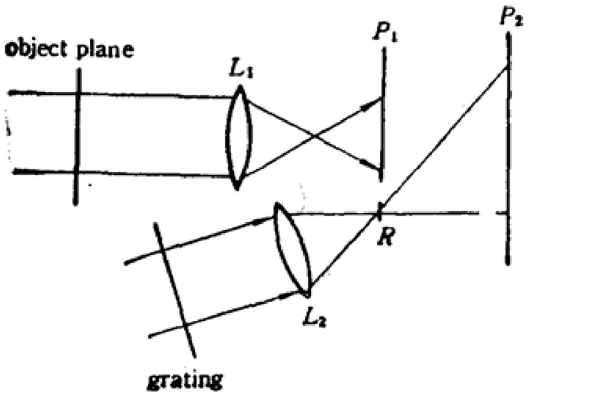

Fig. 1　Schematic of recording lensless Fourier transform holograms

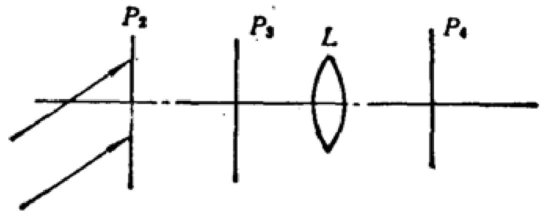

Fig. 2　Schematic of optical differentiation image reconstruction

用无透镜傅里叶变换全息进行光学微分时，进行两次曝光，一次记录准确像 $g_1(x, y)$，另一次记录离焦像 $g_2(x, y)$，两次参考点源位相差 π。

第一次曝光参考点源在全息图上(P_2 平面)的复振幅分布为

$$R_1(x_2, y_2)=R_0\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}x_2^2\right]\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}(-2x_2b+b^2)+y_2^2\right] \tag{3}$$

物光在全息图上的复振幅分布为

$$O_1(x_2,y_2)=\iint g_1(x_1, y_1)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\right]dx_1dy_1 \tag{4}$$

第二次曝光物光在全息图上的复振幅分布为

$$O_2(x_2, y_2)=\iint g_2(x_1, y_1)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\right]dx_1dy_1 \tag{5}$$

参考光与 $R_1(x_2, y_2)$ 位相差 π:

$$R_2(x_2,y_2)=e^{i\pi}R_1(x_2, y_2) \tag{6}$$

在 P_2 平面上的光强分布与 $|O_1(x_2, y_2)+R_1(x_2, y_2)|^2$ 和 $|O_2(x_2, y_2)+R_2(x_2, y_2)|^2$ 成正比，采用线性记录，在全息图上的振幅透射率为

$$t(x_2,y_2)\propto C[|R_1|^2+|O_1|^2+O_1R_1^*+O_1^*R_1+|R_2|^2+|O_2|^2+R_2^*O_2+R_2O_2^*] \tag{7}$$

这里仅讨论原物光波再现项:

$$R_1^*O_1+R_2^*O_2$$

当用平面波 $\exp[-jkbx_2/z_1]$ 照明全息图时在全息图后方的复振幅分布为

$$f(x_2, y_2)=B\exp\left[\frac{jk}{2z_1}b\right]\left[\iint_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1, y_1)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}(x_1^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2)\right]dx_1dy_1\right.$$

$$\left.+e^{i\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} g_2(x_1, y_1)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}(x_1^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2)\right]dx_1dy_1\right] \tag{8}$$

这里 B 总结了所有的常数，在 P_3 平面上的复振幅分布为

$$G(x_3,\ y_3)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_2,\ y_2)\exp\left[\frac{-ik}{2z_1}\ [(x_3-x_2)^2+(y_3+y_2)^2]\right]dx_2\,dy_2 \tag{9}$$

将(8)代入(9)式，对 dx_2, dy_2 积分，得

$$\begin{aligned}G(x_3,y_3)=B'\Big[\iint g_1(x_1,\ y_1)\exp\left[\frac{ik}{z_1}(x_3x_1+y_3y_1)\right]\cdot\exp\left[\frac{-ik}{2z_1}\left[(x_1^2+y_1^2)\left(1-\frac{z_2}{z_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\right.\\ +e^{i\pi}\iint g_2(x_1,\ y_1)\exp\frac{ik}{z_1}(x_3x_1+y_3y_1)\exp\left[\frac{-ik}{2z_1}\ (x_1^2+y_1^2)\left(1-\frac{z_2}{z_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\end{aligned} \tag{10}$$

当 $z_2=z_1$ 时，

$$\begin{aligned}G(x_3,\ y_3)=B'\Big[\iint g_1(x_1,\ y_1)\exp\left[\frac{ik}{z_1}(x_1x_3+y_1y_3)\right]dx_1\,dy_1\\ +e^{i\pi}\iint g_2(x_1,\ y_1)\exp\left[\frac{ik}{z_1}(x_1x_3+y_1y_3)\right]dx_1\,dy_1\end{aligned} \tag{11}$$

(11)式表明在 P_3 平面上得到准确像和离焦像的频谱之差。下面分析离焦像的频谱。

已知在离焦情况下，系统的相干传递函数[2]

$$H(f_x,\ f_y)=P(\lambda d_if_x,\ \lambda d_if_y)\exp[jkW(\lambda d_if_x,\ \lambda d_if_y)] \tag{12}$$

式中 $P(\lambda d_if_x,\ \lambda d_if_y)$ 为光瞳函数，其中

$$jkW(\lambda d_if_x,\lambda d_if_y)=j\pi\lambda d_i'\left(1-\frac{d_i}{d_i'}\right)(f_x^2+f_y^2) \tag{13}$$

d_i 是光瞳到准确像的距离，d_i' 是光瞳到离焦像的距离，令 $b=\pi\lambda(d_i'-d_i)$，离焦像可用下式表示：

$$g_2(x_1,\ y_1)=\iint G_1(f_x,\ f_y)\exp[[jb(f_x^2+f_y^2)]\exp[j2\pi(f_xx+f_yy)]df_x\,df_y \tag{14}$$

式中 $f_x=\frac{x_3}{\lambda z_1}$, $f_y=\frac{y_3}{\lambda z_1}$，当 b 较小时，

$$\exp[ib(f_x^2+f_y^2)]\propto 1+jb(f_x^2+f_y^2)$$

$$g_2(x_1,\ y_1)=\iint G_1(f_x,\ f_y)[1+ib(f_x^2+f_y^2)]\exp[i2\pi(f_xx+f_yy)]df_x\,df_y \tag{15}$$

由(15)式可知离焦像的频谱为 $1+jb(f_x^2+f_y^2)G_1(f_x,\ f_y)$，在 P_3 平面上得到准确像与离焦像频谱之差为

$$G(f_x,\ f_y)=[1+jb(f_x^2+f_y^2)]G_1(f_x,\ f_y)-G_1(f_x,\ f_y)=e^{i\frac{\pi}{2}}b(f_x^2+f_y^2)G_1(f_x,\ f_y) \tag{16}$$

(16)式表明离焦像与准确像频谱之差是物函数二阶光学微分的频谱，在 P_4 平面上将得到二维二阶光学微分。

下面分析按照光路图 4 得到二阶光学微分的方法。参考点源 R 路全息图距离为z_1，在 P_2 平面上的复振幅分布为

$$R(x_2,\ y_2)=R_0\exp\left(\frac{-jk}{2z_1}\ x_2^2\right)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}\left[(-2x_2b+b^2)+y_2^2\right]\right. \tag{17}$$

物体若与 R 点源不在同一平面 P_1 上，而在距全息图 $z_2=z_1+\varDelta$ 的 P_1' 平面上，那么物光在全息图 P_2 平面上的复振幅分布为

$$O'(x_2,\ y_2)=A\int g(x_1,\ y_1)\exp\frac{-jk}{2z_1}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]dx_1\,dy_1 \tag{18}$$

此处仅讨论原物光波项 $O'(x_2,y_2)\cdot R^*(x_2,y_2)$

$$O'(x_2, y_2)\cdot R^*(x_2, y_2)=B\cdot\exp\frac{jk}{2z_1}(b^2-2x_2b)$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1)\exp\frac{-jk}{2z_2}(x_1^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2)$$
$$\times\exp\frac{jk}{2}\left[\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right](x^2+y^2)dx_1dy_1 \tag{19}$$

当用平面波 $\exp\frac{jkbx_2}{z_1}$ 照明全息图时，在全息图后方的复振幅分布为

$$f(x_2, y_2)=B\exp\frac{jk}{2z_1}b^2\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1)\cdot\exp\frac{-jk}{2z_2}(x_1^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2)$$
$$\cdot\exp\frac{jk}{2}\left[\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right](x_2^2+y_2^2)dx_1dy_1 \tag{20}$$

在距全息图 z_1 的 P_3 平面上的复振幅分布：

$$G_2(x_3, y_3)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_2, y_2)\exp\left[\frac{-ik}{2z_2}\left[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2\right]\right]dx_2dy_2 \tag{21}$$

(20)代入(21)式并对 dx_2, dy_2 积分：

$$G_2(x_3, y_3)=B'\exp\left[\frac{jk\Delta}{2z_1}(x_3^2+y_3^2)\right]\iint g_1(x_1, y_1)\exp\left[\frac{-jk}{2z_1}(x_1x_3+y_1y_3)\right]dx_1dy_1$$
$$=B'\exp\left[\frac{jk\Delta}{2z_1}(x_3^2+y_3^2)\right]G_1(x_3, y_3) \tag{22}$$

B' 总结了所有的常数，当用空间频率坐标 $f_x=\frac{x_3}{\lambda z_1}$, $f_y=\frac{y_3}{\lambda z_1}$ 代替 x_3, y_3，并且 $\Delta=z_2-z_1$，比较小时，(15)式可简化为如下形式：

$$G_2(f_x, f_y)=B'(1+j\pi\lambda\Delta(f_x^2+f_y^2))G_1(f_x, f_y) \tag{23}$$

式中 $G_1(f_x, f_y)$ 是准确像的频谱，显然(23)与(15)式离焦像的频谱形式相同。我们用无透镜傅里叶变换全息进行光学微分的第二种方法是，第一次曝光物与参考点源在同一平面 P_1 上，第二次曝光物体沿 z 轴移动 Δ，两次曝光参考点源位相差 π。用平面波 $\exp\frac{ik}{z_1}x_1b$ 照明这种双曝光所得到的全息图时，如图2所示，在 P_3 平面上得到两次曝光物函数的频谱之差：

$$G_2(f_x, f_y)-G_1(f_x, f_y)=e^{i\frac{\pi}{2}}B'\pi\lambda\Delta(f_x^2+f_y^2)G_1(f_x, f_y) \tag{24}$$

在 P_4 平面上得到二阶光学微分。

三、实验装置及结果

全息图的记录光路如图1和图3所示，图1即表示第一种方法，通过光学系统把离焦像和准确像分布成在 P_1 平面上。图3表示第二种方法，物体放在 P_1 平面上即成准确像，物体沿 z 轴移动 Δ，在 P_4 平面上形成离焦像。两次曝光参考点源位相差 π 是用在参考光路中加一个互补光栅——条纹互相错动半个周期的两个光栅，由于两个互补光栅的正一级衍射之间位相差

(下转第50页)

由(18)式不难看出,各阶光电子峰都具有双峰的结构,若以 Δ_m 为横坐标,则双峰分别位于 $\Delta_m=\Delta_\pm$ 处(与 m 无关),其间隔 $\Delta=\Delta_+-\Delta_-=\rho\cos\theta$,相应的半宽为 $\gamma_\pm$。由于峰的强度随阶数的增高按比例衰减,所以总的说来高阶峰的双峰要比低阶峰的双峰宽。对于同阶的双峰来说,其高度和宽度一般是不相同的,这是因为从(19)式可看出,无论 $\Delta_a\geqslant0$ 还是 $\Delta_a<0$, Δ_+ 总是大于 Δ_- 的,但当 $\Delta_a>0$ 时, $|\gamma_+|>|\gamma_-|$,所以双峰中能量较高的峰比能量较低的峰宽(如图2所示);当 $\Delta_a<0$ 时, $|\gamma_+|<|\gamma_-|$,与 $\Delta_a>0$ 的情形正好相反(见图3),而当 $\Delta_a=0$ 时(即共振时), $\gamma_+=\gamma_-$,所以双峰是等宽等高的(如图4所示)。从图5的计算结果可知:随着失谐量 Δ_a 的增加,双峰的不对称性就越明显。由此可推断出:当远离共振(即 Δ_a 较大)时,光电子峰的双峰结构便会消失,转变为单峰结构。

3.3 各阶光电子峰的物理解释

由(18)式不难看出:各阶光电子峰都具有相类似的结构,这是因为各阶光电子峰的表达式中分母都含有因式 $(\Delta_m-\Delta_+-i\gamma_+)(\Delta_m-\Delta_--i\gamma_-)$。我们知道, $\Delta_\pm$ 和 $\gamma_\pm$ 分别是由频率为 Ω 的激光场与原子相互作用产生的缀饰态的能级和能级宽度,而各阶光电子峰是频率为 ω 的激光场诱导缀饰态向各连续态跃迁的结果。相临阶的光电子峰之间的间隔为 ω, $\Delta_\pm$ 可确定各阶峰的位置,而 $\gamma_\pm$ 的大小反映了光电子峰的宽度。

参 考 文 献

1 P. E. Coleman, P. L. Knight, *J. Phys. B*, **14**, 2139(1981)
2 P. L. Knoght, *J. Phys. B*, **12**, 3297(1979)
3 Z. Deng *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 486(1985)
4 J. Grochmalick *et al.*, *J. Phys. B*, **19**, 3649(1986)
5 A. Dulcic, *Phys. Rev. A*, **35**, 1673(1987)
6 Z. Bialynicka-Birula, *J. Phys. B*, **17**, 3091(1984)
7 Z. Deng *et al.*, *Phys. Rev. A*, **34**, 2492(1986)

(上接第70页)

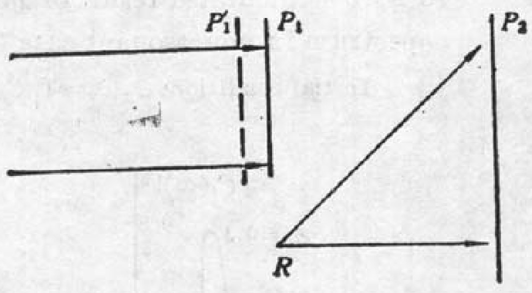

Fig.3 Recording geometry of the second method

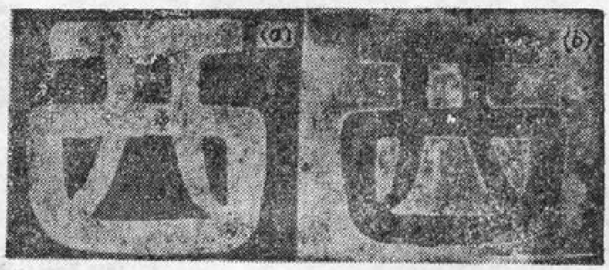

Fig.4 Experimental results
(*a*) object; (*b*) optical differentiation

π,因此,在两次曝光中分别取互补光栅之一做正一级衍射做参考光源,即可得到两次曝光位差 π。图4表示微分结果。

参 考 文 献

1 S. K. Yao, S. H. Lee, *JOSA*, **61**, 474(1971)
2 黄婉云,傅里叶光学教程,北京师范大学出版社,北京,1985, 182～183