

# 梯形截面介质光波导的模方程

马春生 刘式慵

(吉林大学, 长春 130023)

高福斌

(中国科学院长春物理研究所, 130021)

**摘要:** 本文简化了有效折射率法和 WKB 法对梯形截面介质光波导传输特性的分析过程, 给出了计算  $E_{mn}^x$  模有效折射率的近似模方程, 并用数值计算结果和实验结果检验了该模方程的精度。

**关键词:** 光波导, 梯形截面, 模方程, 有效折射率

## Mode equation of trapezoidal cross-section dielectric optical waveguide

*Ma Chunsheng, Liu Shiyong*

(Jilin University, Changchun 130023)

*Gao Fubin*

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica, Changchun 130021)

**Abstract:** A simplified method is presented for analysing the propagation characteristics of trapezoidal cross-section dielectric optical waveguides by the effective index method and WKB theory, and the approximate mode equation is derived for calculating the  $E_{mn}^x$  mode effective indices. Computed results from this mode equation are in agreement with the numerical ones of the finite element method as well as the experiments

**Key words:** optical waveguide, trapezoidal cross-section, mode equation, effective index

## 引 言

当我们用化学刻蚀方法或离子束刻蚀方法制备矩形或脊形介质光波导时, 由于侧向刻蚀作用难以得到规则的矩形或脊形截面, 通常得到的是梯形截面。因此这种梯形截面介质光波导在集成光学中有着广泛的应用。由于这种波导的边界复杂, 精确地数值分析其传输特性非常困难。P. M. Pelosi 等人曾运用有限元法分析, 虽然得到精度较高的结果, 但计算过程繁琐<sup>[1]</sup>。J. G. Gallagher 曾采用矩形截面近似, 并用有效折射率法分析, 所得结果与上述有限元结果比较接近<sup>[2]</sup>。本文在一定的近似条件下对有效折射率法和 WKB 法加以简化, 导出了计算这种波导的  $E_{mn}^x$  模有效折射率的近似模方程。文中两个具体算例表明, 用此模方程可对梯

形截面介质光波导的传输特性进行公式化的分析计算,与上述数值分析方法相比,相当简捷迅速,并能得到令人满意的结果。

### 近似模方程的推导

梯形截面介质光波导的结构如图 1 所示,其中  $n_1, n_2, n_3$  分别为波导层、衬底和上面及两侧包层介质的折射率,并有  $n_1 > n_2 > n_3$ ;  $b_0, b_1$  分别为梯形外部和内部的波导层厚度;  $2a_0, 2a_1$  分别为梯形的上下底宽;  $\theta$  为坡度角。梯形周界曲线  $b(x)$  可表示为

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & (|x| \leq a_0) \\ b_1 - \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} (|x| - a_0) & (a_0 \leq |x| \leq a_1) \\ b_0 & (|x| \geq a_1) \end{cases} \quad (1)$$

当  $b_0 = 0$  时称为梯形条波导;当  $b_0 \neq 0$  时称为梯形脊波导。

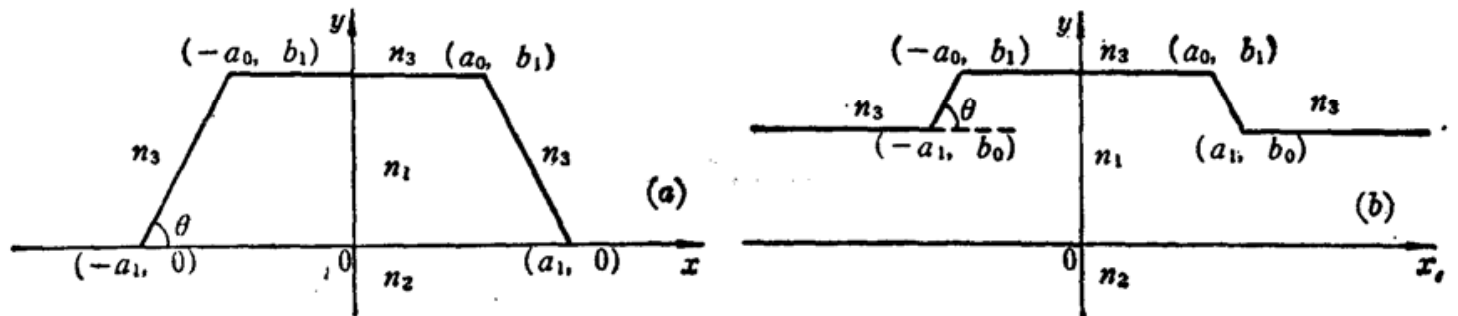


Fig. 1 Cross-section of trapezoidal waveguides

(a) trapezoidal strip waveguide ( $b_0 = 0$ ); (b) trapezoidal rib waveguide ( $b_0 \neq 0$ )

本文仅对  $E_{mn}^o$  模进行分析。根据有效折射率法<sup>[3]</sup>,这种梯形波导可等效成一个  $x$  方向具有渐变折射率分布的平面光波导,其折射率分布  $n(x)$  为  $y$  方向一系列的折射率分布为  $n_2, n_1, n_3$  的阶跃平板波导的有效折射率,变量  $b(x)$  即为这些平板波导的厚度。 $n(x)$  满足下述平板波导的 TE 模特征方程<sup>[4]</sup>:

$$k_0 [n_1^2 - n^2(x)]^{1/2} b(x) = n\pi + \text{tg}^{-1} \left[ \frac{n^2(x) - n_2^2}{n_1^2 - n^2(x)} \right]^{1/2} + \text{tg}^{-1} \left[ \frac{n^2(x) - n_3^2}{n_1^2 - n^2(x)} \right]^{1/2} \quad (2)$$

式中,  $n = 0, 1, 2, \dots$  为  $y$  方向模阶数;  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  为真空中波数,  $\lambda_0$  为真空中光波长。

在  $y$  方向模远离截止的条件下,由式(2)可近似求出此  $x$  方向等效渐变折射率平面光波导的折射率分布  $n(x)$  的近似表达式。首先引入参量

$$V(x) = k_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} b(x), \quad P(x) = \left[ \frac{n_1^2 - n^2(x)}{n_1^2 - n_2^2} \right]^{1/2}, \quad Q = \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2} \right)^{1/2} \quad (3)$$

则式(2)可简化为

$$V(x)P(x) = (n+1)\pi - \sin^{-1} P(x) - \sin^{-1} QP(x) \quad (4)$$

当  $y$  方向模离截止较远时,  $P(x), QP(x) \ll 1$ , 则有  $\sin^{-1} P(x) \approx P(x), \sin^{-1} QP(x) \approx QP(x)$ , 代入式(4)可近似得到

$$P(x) = \frac{(n+1)\pi}{1+Q+V(x)} \quad (5)$$

进而由式(3)和式(5)可求出  $n(x)$  近似满足

$$n^2(x) = \begin{cases} n_1^2 - R^2 & (|x| \leq a_0) \\ n_1^2 - R^2/t^2 & (a_0 \leq |x| \leq a_1) \\ n_1^2 - R^2/t_1^2 & (|x| \geq a_1) \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$t = 1 - T(|x| - a_0) \quad t_1 = 1 - T(a_1 - a_0) \quad (7)$$

$$\begin{cases} R = \frac{(n+1)\pi}{(n_1^2 - n_2^2)^{-1/2} + (n_1^2 - n_3^2)^{-1/2} + k_0 b_1} \\ T = \frac{k_0(b_1 - b_0)}{(a_1 - a_0) [(n_1^2 - n_2^2)^{-1/2} + (n_1^2 - n_3^2)^{-1/2} + k_0 b_1]} \end{cases} \quad (8)$$

此  $x$  方向等效渐变折射率平面光波导的模有效折射率可由 WKB 法求出。根据 WKB 法,  $N$  满足下述积分方程<sup>[5]</sup>:

$$k_0 \int_{-x_0}^{x_0} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (9)$$

式中,  $m = 0, 1, 2, \dots$  为  $x$  方向模阶数;  $\pm x_0$  为光线两个拐点的坐标, 并满足

$$n^2(\pm x_0) = N^2 \quad (a_0 < x_0 < a_1) \quad (10)$$

由式(6)和式(10)可得

$$n_1^2 - N^2 = R^2/t_0^2 \quad (11)$$

式中

$$t_0 = 1 - T(x_0 - a_0) \quad (12)$$

把式(6)代入式(9), 并利用式(7)式、(11)和式(12), 可得

$$4k_0 \left[ \int_0^{x_0} (n_1^2 - R^2 - N^2)^{1/2} dx - \frac{R}{T t_0} \int_1^{t_0} \frac{(t^2 - t_0^2)^{1/2}}{t} dt \right] = (2m + 1)\pi \quad (13)$$

积分后式(13)变为

$$4k_0 \left\{ (n_1^2 - R^2 - N^2)^{1/2} a_0 + \frac{R}{T t_0} \left[ (1 - t_0^2)^{1/2} - t_0 \operatorname{tg}^{-1} \frac{(1 - t_0^2)^{1/2}}{t_0} \right] \right\} = (2m + 1)\pi \quad (14)$$

由式(11)得到

$$t_0 = \frac{R}{(n_1^2 - N^2)^{1/2}} \quad (15)$$

把式(15)代入式(14), 则可得到  $x$  方向等效渐变折射率平面光波导即原梯形波导的  $E_{mn}^o$  模有效折射率  $N$  满足的近似模方程为

$$\frac{4k_0}{T} \left[ (a_0 T + 1) (n_1^2 - R^2 - N^2)^{1/2} - R \operatorname{tg}^{-1} \frac{(n_1^2 - R^2 - N^2)^{1/2}}{R} \right] = (2m + 1)\pi \quad (16)$$

式中  $R$  和  $T$  由式(8)规定。

## 实算结果与讨论

我们运用模方程(16)对下述两种集成光学中应用的梯形截面介质光波导的  $E_{mn}^o$  模有效折射率  $N$  进行了实算。

### 1. AlGaAs 衬底上的 GaAs 梯形条波导 ( $b_0 = 0$ )

此种波导是采用液相外延的方法在 GaAs 基片上依次生长 AlGaAs 层作为波导衬底和 GaAs 层作为波导层，然后采用化学刻蚀的方法形成梯条形截面(图 1(a))。实算时有关参量选为：真空中光波长  $\lambda_0=1.06 \mu\text{m}$ 。在此波长下，高纯 GaAs 波导芯的折射率  $n_1=3.48$ ， $\text{Al}_{0.12}\text{Ga}_{0.88}\text{As}$  衬底的折射率  $n_2=3.42$ ，上面和两侧包层  $\text{SiO}_2$  的折射率  $n_3=1.45^{[1]}$ 。模有效折射率  $N$  随归一化芯厚度  $b_1/2a_0$ ，坡度角  $\theta$  以及芯厚度  $b_1$  变化的曲线分别由图 2、图 3 和图 4 给出。可以看出，当  $b_1/2a_0 \leq 1$  且芯厚度  $b_1$  较大时，例如  $b_1 \geq 2 \mu\text{m}$ ，芯的上下宽度  $2a_0$ ， $2a_1$  及坡度角  $\theta$  的变化对主模有效折射率  $N$  的影响不很大。还可看出， $N$  随  $b_1$ ， $2a_0$ ， $2a_1$  的增大而增大，随  $\theta$  的增大而减小。

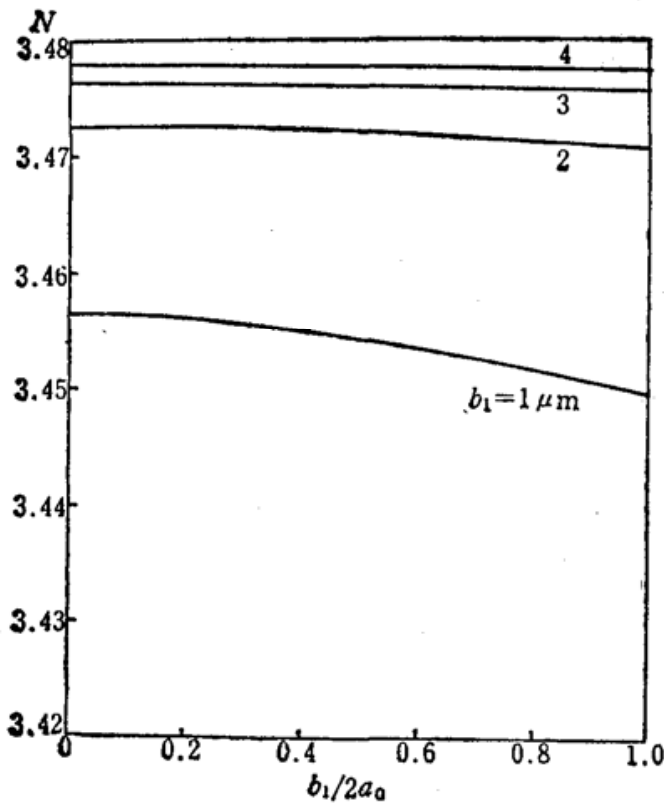


Fig. 2  $E_{00}^z$  mode effective index  $N$  versus normalized core thickness  $b_1/2a_0$ .  $\theta=45^\circ$  results of Eq. (16)

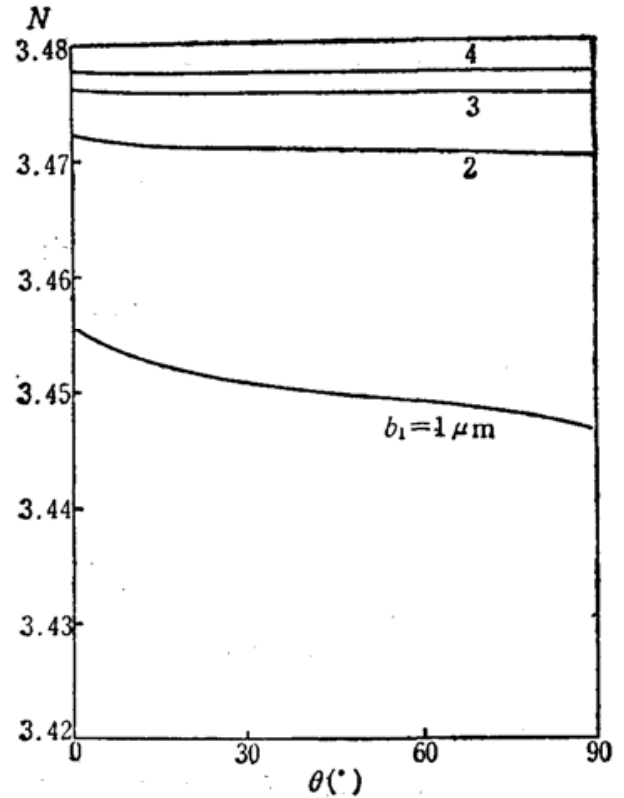


Fig. 3  $E_{00}^z$  mode effective index  $N$  versus gradient angle  $\theta$ .  $2a_0=b_1$ . results of Eq. (16)

### 2. Schott BAK-2 玻璃衬底上的 7059 玻璃梯形脊波导 ( $b_0 \neq 0$ )

此种波导是采用射频溅射的方法在 Schott BAK-2 玻璃衬底上淀积 7059 玻璃薄膜作为波导层，然后采用离子束刻蚀的方法形成梯脊形截面(图 1(b))。实算时有关参量选为：真空中光波长  $\lambda_0=0.6328 \mu\text{m}$ 。在此波长下，7059 玻璃芯层的折射率  $n_1=1.568$ ，Schott BAK-2 玻璃衬底的折射率  $n_2=1.538$ ，用空气作为上面及两侧的包层介质，其折射率  $n_3=1^{[1,2]}$ 。模有效折射率  $N$  随梯形下底宽  $2a_1$  变化的曲线由图 5 给出。为了检验模方程(16)的精度，在图 4 和图 5 中还分别给出了有关的数值计算结果和实验结果。可以看出，模方程(16)的结果与有效折射率 WKB 法的数值结果符合得很好，因此模方程(16)可以代替有效折射率 WKB 法对梯形截面介质光波导传输特性的数值分析，方便实用。还可看出，模方程(16)的结果与文[1]中的有限元法的数值结果及实验结果也是比较接近的，说明模方程(16)具有较好的精度。

需要指出的是，本文曾在梯形波导的  $y$  方向应用了有效折射率法，因此梯形周界曲线

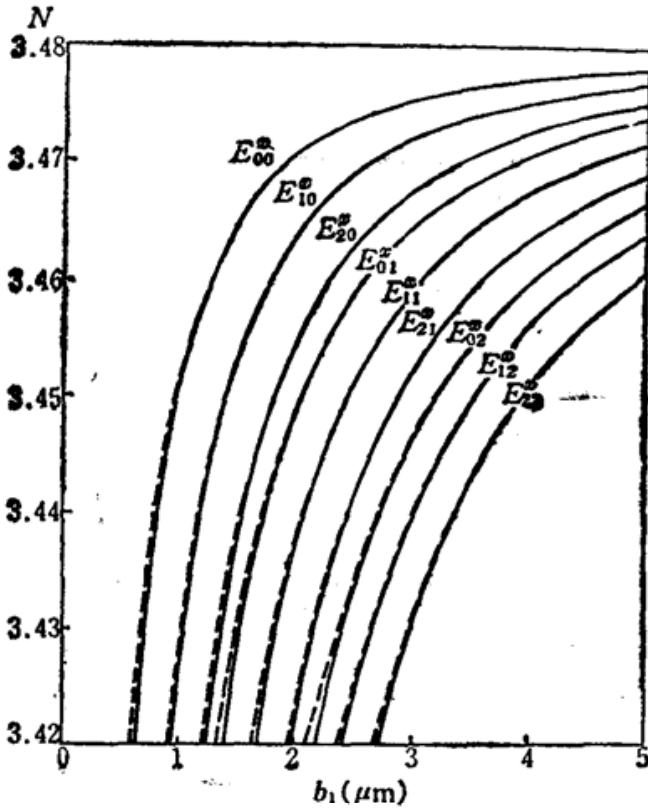


Fig. 4  $E_{mn}^x$  mode effective index  $N$  versus core thickness  $b_1$ .  $\theta=45^\circ$ ,  $2a_0=b_1$

— results of Eq. (16); - - - numerical results of both effective index and WKB methods, that is, of Eqs. (2) and (9)

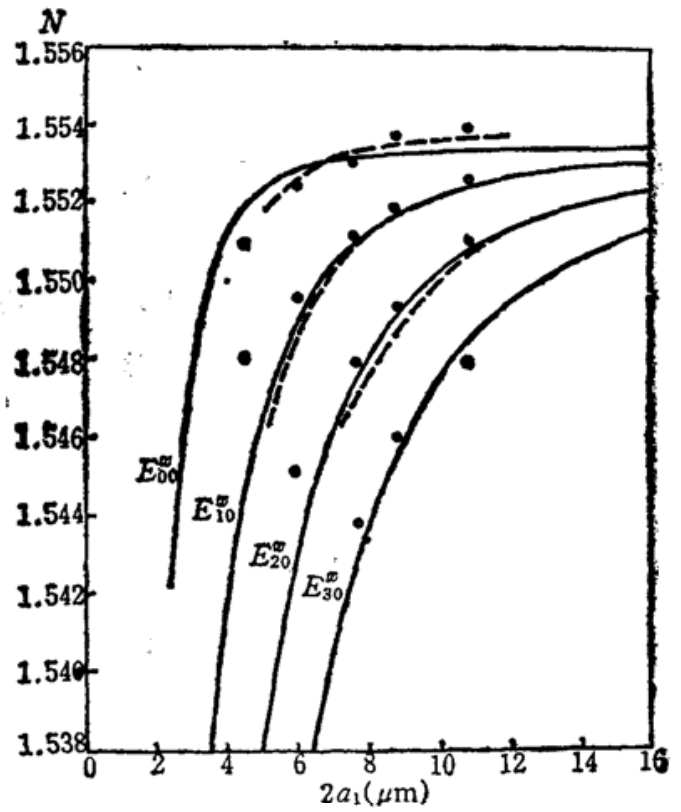


Fig. 5  $E_{m0}^x$  mode effective index  $N$  versus trapexoid basewidth  $2a_1$ .  $b_0=0.34\mu\text{m}$ ,  $b_1=1.07\mu\text{m}$ ,  $\theta=32^\circ$

— results of Eq. (16); - - - numerical results of finite-element method in Ref. [1]; ●○— experimental results in Ref. [1]

$b(x)$ 要缓变。同时在  $x$  方向应用了 WKB 法, 因此等效渐变折射率平面光波导的折射率分布  $n(x)$ 要缓变, 进而要求  $b(x)$ 要缓变, 因此这两种方法的结合要求坡度角  $\theta$  不能过大。模方程 (16) 在导出过程中曾做了模远离截止的假设, 因此波导芯厚度  $b_1$  不能过于接近模截止。当坡度角  $\theta$  接近  $90^\circ$ ,  $b_1$  临近模截止时, 模方程 (16) 的计算偏差要相对大些。当  $\theta$  越小,  $b_1$  越大时, 模方程 (16) 的计算结果越精确。

参 考 文 献

- 1 P. M. Pelosi *et al.*, *Appl. Opt.*, **17**, 1187 (1978)
- 2 J. G. Gallagher, *Electron Lett.*, **15**, 734 (1979)
- 3 V. Ramaswamy, *Bell Syst. Tech. J.*, **53**, 697 (1974)
- 4 M. S. Sodha *et al.*, *Inhomogeneous Optical Waveguides*, Plenum, Press, New York, 1977, 24~29
- 5 *Idem* *ibid.*, p. 148
- 6 H. G. Casey *et al.*, *Heterostructure Lasers*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978, 43~46.