

抛物型等效法研究指数型梯度 折射率纤维的成像

邱锦辉 廖廷佛

(福建师范大学激光研究所, 350007)

提要: 本文采用抛物型等效法研究指数型梯度折射率纤维的成像特性。这种方法计算比严格解析法方便, 精度比锥形等效法高, 且适用范围大。

关键词: 梯度折射率, 光纤, 成像

Study on the image of an exponential-type GRIN fiber by the method of "equivalent parabolic-type"

Qiu Jinhui, Liao Tingdi

(Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract: The imaging characteristics of an exponential-type GRIN fiber is studied by the method of "equivalent parabolic-type". This method is easier to be used to calculate the Gaussian parameters than the exact analytical method, with results of higher precision and wider applicability than those by the equivalent-cone method.

Key words: gradient index, optical fiber, imaging

一、引言

锥形梯度折射率透镜在一些需要大数值孔径和小像差的场合具有广阔的应用前景^[1~5]。然而在锥形梯度折射率纤维棒的拉制中, 由于材料和工艺的局限性, 其实际折射率分布往往与理想的锥形分布形式有所偏差, 而呈现出一种指数型分布^[6]。对这类折射率纤维的成像已有探讨, 但有关高斯光学公式含贝塞尔函数, 不便于计算。本文采用抛物型等效法研究了指数型梯度折射率纤维的近轴成像特性。这种方法比[5, 6]的方法方便, 而且比锥形等效法有更高的精度和更大的适用范围。

二、光线方程的近似解析解

考虑一指数型梯度折射率纤维, 其厚度为 d , 直径为 ϕ , 两端面分别位于坐标 z 轴上的 $z=$

0 和 $z=d$ 处。取笛卡尔坐标 (x, y, z) , 且 z 轴与纤维光轴重合, 则指数型梯度折射率纤维的折射率分布为

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (1)$$

式中 n_0 为纤维轴中心处的折射率, $g(z)$ 是纤维的轴向梯度参数, 且

$$g(z) = \frac{g_0}{\exp(\pm z/L_0)} \quad (0 < z \leq d) \quad (2)$$

式中 $g_0 = g(0)$, L_0 为描述纤维折射率沿轴向变化的几何参数。由 (1)、(2) 式可得指数型梯度折射率纤维的等折射率面方程:

$$r = r_0 \exp\left(\pm \frac{z}{L_0}\right) \quad (3)$$

式中 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, r_0 为等折射率面参数。(3) 式表明等折射率面为指数型曲面族, 因此将这种纤维称为“指数型”梯度折射率纤维。如图 1 为指数型梯度折射率纤维及其等折射率面示意图。

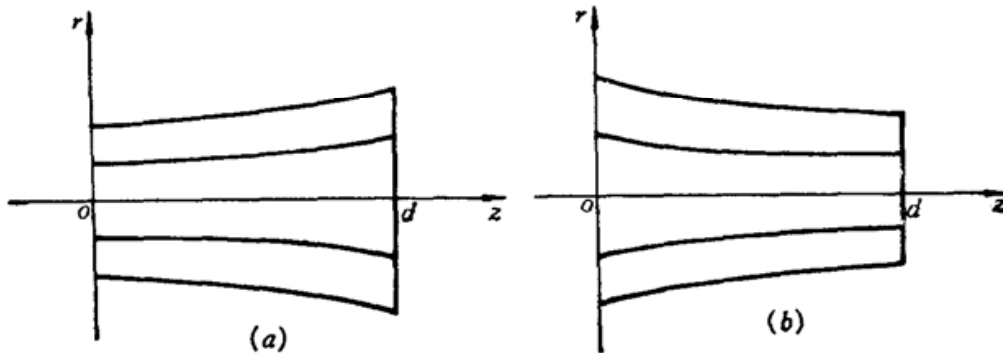


Fig. 1 Exponential-type GRIN fiber with equi-index surfaces

a) $g(z) = g_0/\exp(+z/L_0)$; b) $g(z) = g_0/\exp(-z/L_0)$

在近轴光学近似条件下, 计及 (1) 式, 梯度折射率纤维的光线方程为^[5]

$$\ddot{H}(z) + g^2(z)H(z) = 0 \quad (4)$$

初始条件为

$$H_1(0) = 0, \dot{H}_1(0) = 1 \quad (5a)$$

$$H_2(0) = 1, \dot{H}_2(0) = 0 \quad (5b)$$

式中 $H(x) \equiv x(z)$ 或 $y(z)$, $\dot{H}(z) = dH/dz$, $\ddot{H}(z) = d^2H/dz^2$ 。对指数型梯度折射率纤维, 光线方程 (4) 存在严格解析解^[6], 然而光线轨迹方程以及高斯参数、物像计算公式含贝塞尔函数, 不便于计算。研究表明, 在一定条件下, 从指数型纤维的光线方程可得到另一种近似解析解, 这些解为普通函数, 易于计算, 而且比锥形等效法所得结果精确, 适用范围大。

当 $d \ll L_0$ 时, (2) 式的指数函数按幂级数展开, 并只取前三项, 得

$$g(z) = \frac{2g_0}{1 + (1 \pm z/L_0)^2} \quad (6)$$

这时, (3) 式变为

$$r_p = r_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{z}{L_0} \right)^2 \right] \quad (7)$$

从 (6)、(7) 式可知, 在 $d \ll L_0$ 条件下, 指数型纤维变为近似的“抛物型”纤维, 这时光线方程

(4) 具有解析解。为求解方程(4)~(6), 引入变量 t 和函数 $y(t)$:

$$t = 1 \pm \frac{z}{L_e} \quad (8)$$

$$H(t) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} y(t) \quad (9)$$

并将 $dt = \pm \frac{1}{L_e} dz$ 及

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \dot{y}(t) + \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} y(t) \\ \frac{d^2H}{dt^2} &= (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \ddot{y}(t) + \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \dot{y}(t) + \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} y(t) \end{aligned}$$

代入方程(4), 可得

$$(1+t^2)^2 \ddot{y}(t) + 2t(1+t^2) \dot{y}(t) + 4b^2 y(t) = 0 \quad (10)$$

式中

$$b^2 = g_0^2 L_e^2 + \frac{1}{4} \quad (11)$$

再引入变量 ξ ,

$$\operatorname{tg} \xi = t \text{ 或 } \xi = \operatorname{tg}^{-1} t \quad (12)$$

将 $\dot{y}(t) = \cos^2 \xi \dot{y}(\xi)$

$$\ddot{y}(t) = \cos^4 \xi \ddot{y}(\xi) - 2 \sin \xi \cos^3 \xi \dot{y}(\xi)$$

及 $t = \operatorname{tg} \xi$ 代入(10)式, 可得

$$\ddot{y}(\xi) + 4b^2 y(\xi) = 0 \quad (13)$$

方程(13)的一般解为

$$y(\xi) = A \cos(2b\xi) + B \sin(2b\xi) \quad (14)$$

再由(12)式和(9)式得

$$H(z) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} [A \cos(2b \operatorname{tg}^{-1} t) + B \sin(2b \operatorname{tg}^{-1} t)] \quad (15)$$

式中 A, B 为由初始条件(5.a)、(5.b)确定的常数。将(15)式代入(5.a)和(5.b), 求得光线方程(4)的两个线性无关近似解:

$$H_1(z) = \pm \frac{L_e}{\sqrt{2b}} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left[(2b \operatorname{tg}^{-1} t) - \frac{1}{2} \pi b \right] \quad (16)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) - \frac{1}{2b} \sin \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) \right] \quad (17)$$

由(16)、(17)式求得斜率方程

$$\dot{H}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2b} (1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \left[2b \cos \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) + t \sin \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_2(z) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2} L_e (1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \left[(t-1) \cos \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(2b + \frac{t}{2b} \right) \sin \left(2b \operatorname{tg}^{-1} t - \frac{1}{2} \pi b \right) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

显然, (16)~(19)式满足恒等式:

$$\dot{H}_1(z)H_2(z) - H_1(z)\dot{H}_2(z) = 1 \quad (20)$$

式(16)、(18)描述与光轴成一倾角 $n_0\dot{H}_1(0)$, 且在端面轴中心处入射的光线在纤维中的传播; 而式(17)、(19)则描述平行于光轴入射的光线在纤维中的传播。如图 2、3 所示为上述两条特定光线在指数型梯度折射率纤维中的传播情况 ($b=4.0$)。

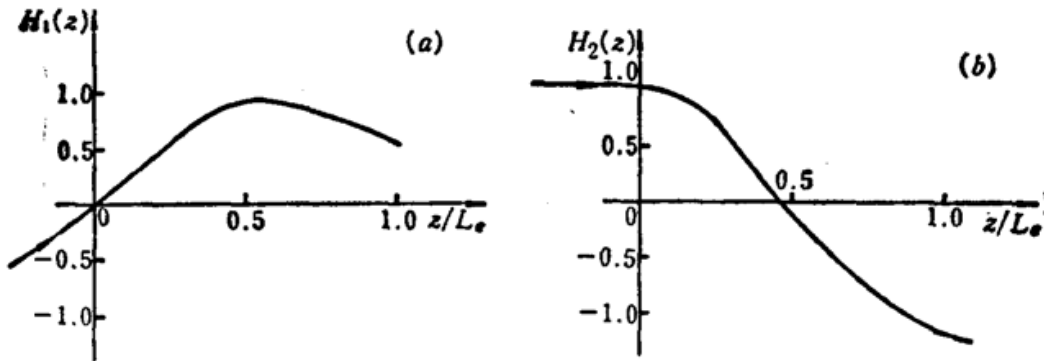


Fig. 2 Propagation of ray in the exponential-type GRIN fiber with $g(s) = g_0/\exp(+s/L_e)$

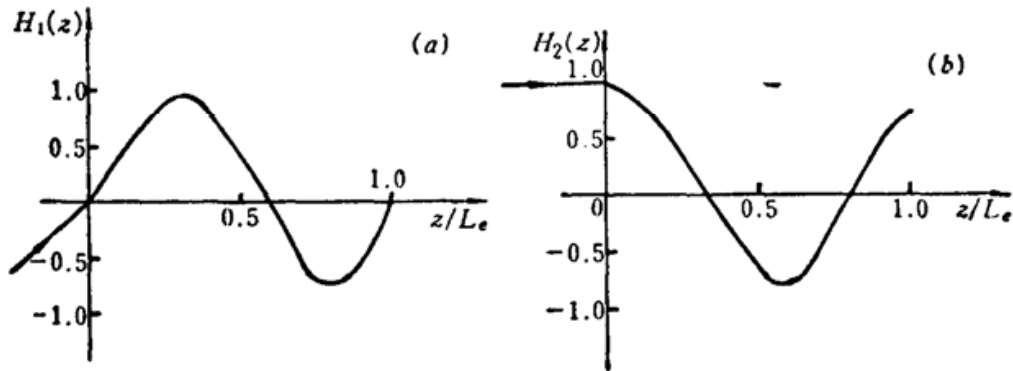


Fig. 3 Propagation of ray in the exponential-type GRIN fiber with $g(s) = g_0/\exp(-s/L_e)$

三、高斯光学公式及其适用条件

考虑指数型梯度折射率纤维的近轴成像。设 l_0 、 l'_0 分别为物面、像面离纤维入射端面 ($z=0$)、出射端面 ($z=d$) 的距离。则物像公式及放大倍率 β 由下式给出^[5]

$$l'_0 = \frac{n_0 l_0 H_2(z) - H_1(z)}{n_0 [\dot{H}_1(z) - n_0 l_0 \dot{H}_2(z)]} \quad (21)$$

$$\beta = \frac{1}{\dot{H}_1(z) - n_0 l_0 \dot{H}_2(z)} \quad (22)$$

将(16)~(19)式代入(21)、(22)式,得

$$l'_0 = \frac{(1+t^2)}{2n_0} \cdot \frac{\left[-n_0 l_0 \left(\cos \alpha - \frac{1}{2b} \sin \alpha \right) \pm \frac{L_e}{b} \sin \alpha \right]}{\left\{ -\left(\cos \alpha + \frac{t}{2b} \sin \alpha \right) \pm \frac{n_0 l_0}{2L_e} \left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right] \right\}} \quad (23)$$

$$\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\left(\cos \alpha + \frac{t}{2b} \sin \alpha \right) \pm \frac{n_0 l_0}{2L_e} \left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right] \right\}^{-1} \quad (24)$$

式中 $\alpha \equiv 2b \left[\operatorname{tg}^{-1} t - \frac{\pi}{4} \right]$ 。

由(23)式, 令 $l'_0 \rightarrow \infty$, 得物方焦点位置:

$$l_f = \pm \frac{L_e}{n_0 b} \cdot \frac{(2b \cos \alpha + t \sin \alpha)}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (25)$$

由(24)式, 令 $\beta=1$, 得物方主点位置:

$$l_h = \pm \frac{L_e}{n_0 b} \cdot \frac{[2b \cos \alpha + t \sin \alpha - \sqrt{2} b (1+t^2)^{\frac{1}{2}}]}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (26)$$

所以, 物方焦距为

$$f = l_f - l_h = \pm \frac{L_e}{n_0} \cdot \frac{\sqrt{2} (1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (27)$$

由(23)式, 令 $l_0 \rightarrow \infty$, 得像方焦点位置:

$$l'_f = \mp \frac{L_e}{n_0} \cdot \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \alpha - \frac{1}{2b} \sin \alpha \right]}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (28)$$

将 $l_0 = l_h$ 代入(23)式, 得像方主点位置:

$$l'_h = \mp \frac{L_e}{n_0} \cdot \frac{(1+t^2) \left(\cos \alpha - \frac{1}{2b} \sin \alpha \right) - \sqrt{2} (1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (29)$$

因此, 像方焦距为

$$f' = l'_f - l'_h = \mp \frac{L_e}{n_0} \cdot \frac{\sqrt{2} (1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(t-1) \cos \alpha - \frac{1}{2b} (t+4b^2) \sin \alpha \right]} \quad (30)$$

对于给定厚度为 d 的纤维, 在以上各式中,

$$z = d, \quad t = 1 \pm d/L_e, \quad \alpha = 2b [\operatorname{tg}^{-1}(1 \pm d/L_e) - \pi/4].$$

因(16)~(19)式是指数型纤维光线轨迹的一种近似解, 故物像公式及高斯参数计算公式(23)~(30)也不是精确的, 它们有一定的适用范围, 下面讨论上述结果的适用条件。

由(3)和(7)式可求得指数型纤维与在 $d \ll L_e$ 条件下得到的“抛物型”纤维间的等折射率面的误差:

$$\left(\frac{\Delta r}{r_0} \right) \approx \frac{1}{6} \left(\frac{z}{L_e} \right)^3 \mp \frac{1}{24} \left(\frac{z}{L_e} \right)^4 \quad (31)$$

当 $z = d$ 时, 有

$$\left[\frac{\Delta r}{r_0} \right]_{\max} \approx \frac{1}{6} \left(\frac{d}{L_e} \right)^3 \cdot \left[1 \mp \frac{1}{4} \left(\frac{d}{L_e} \right) \right] \quad (32)$$

从(32)式可知, 当 d/L_e 越小时, “等效抛物型”与指数型间的差别也越小。因此, 由(23)~(30)式得到的结果就越精确。

由梯度折射率纤维等折射率面的允许误差

$$\left[\frac{\Delta r}{r_0} \right]_M = \frac{1}{\left(g_0 \frac{\phi}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{\Delta n}{n_0} \right) \quad (33)$$

及条件 $\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_{\max} \leq \left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_M$, 可求得本文结果的适用条件:

$$\left(\frac{d}{L_e}\right) \leq \left[\frac{6}{\left(g_0 \frac{\phi}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (34)$$

式中 $\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)$ 为纤维的折射率精度, 对 1~2 类光学玻璃, $\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right) = (3 \sim 4) \times 10^{-4}$ 。例如, 已知指数型纤维的 $\left(g_0 \cdot \frac{\phi}{2}\right) = 0.2599$, 并取 $\frac{\Delta n}{n_0} = 4 \times 10^{-4}$, 则由 (34) 式可求得 $d \leq \frac{1}{3} L_e$ 。

在满足 (34) 式条件下, 指数型梯度折射率纤维的研究可化为“等效抛物型”纤维问题, 从而可利用本文的高斯光学公式, 这些公式便于计算和分析, 而且又能满足精度要求。

表 1 给出一指数型梯度折射率纤维分别采用锥形等效法及本文的抛物型等效法计算的焦距值。并与解析法的精确值 $f' = 11.657$ 作了比较, 求得 $\Delta f'/f'$ 。表中最后一栏给出了不同方法的适用条件的估算。纤维的参数为 $n_0 = 1.5722$, $g_0 = 0.1732$, $g_0 \cdot \frac{\phi}{2} = 0.2599$, $d = 1.5$, $L_e = 7.5$, 以 $g(z) = g_0/\exp\left(-\frac{z}{L_e}\right)$ 情形为例。

Table 1 Comparison of results obtained by different methods

Method	f'	$\frac{\Delta f'}{f'} \times 100\%$	$\left(\frac{d}{L_e}\right)_{\max}$
Taper A	11.468	+1.62%	$\frac{1}{10}$
Taper B	11.733	-0.65%	$\frac{1}{5}$
Parabolic-type	11.666	-0.07%	$\frac{1}{3}$

从表中结果可知, 本文的结果不但比锥形等效法更精确, 而且适用范围也更大。另一方面, 从锥形法和抛物型法结果的一致性可知, 当 L_e 足够大或 d/L_e 足够小时, $g(z)$ 由 (6) 式确定的抛物型纤维与锥形纤维 (A 或 B) 是可以等效的。

参 考 文 献

- 1 S J. S. Brown, *Appl. Opt.*, **19**(7), 1056~1060(1980)
- 2 殷宗敏 *et al.*, 物理学报, **30**(12), 1603~1608(1981)
- 3 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **23**(7), 1107~1109 (1984)
- 4 廖廷伟, 中国激光, **16**(5), 267~271(1989)
- 5 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(19), 3418~3424(1986)
- 6 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(7), 1076~1078(1986)