

类锥形发散梯度折射率纤维 的光线传输及成像研究

廖 廷 佛

(福建师范大学激光所, 350007)

提要: 本文研究一种指数型发散梯度折射率纤维的光线传输及近轴成像特性。从光线微分方程求得纤维中光线轨迹的解析解, 并给出纤维透镜的高斯参数及物像计算公式。

关键词: 梯度折射率, 光纤, 成像

Ray propagation and image formation through an exponential-type defocusing GRIN fiber

Liao Tingdi

(Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract: The ray propagation and image formation through an exponential-type defocusing GRIN fiber is studied. The analytical solutions for ray paths in the fiber are obtained from the ray differential equation and the Gaussian parameters and the imaging formulas of the lens are also given.

Key words: gradient index, optical fiber, imaging

一、引 言

研究表明, 梯度折射率纤维透镜在微型光学和激光装置中具有广阔的应用前景。与聚焦型纤维元件一样, 发散型梯度折射率纤维透镜也将是微型光学成像系统的重要元件之一。文献[1, 2]对“锥形”这一新颖的发散梯度折射率纤维透镜的光学特性做了有益探讨。然而, 在锥形发散纤维的拉制中, 由于工艺的局限, 实际折射率分布往往与理想的“锥形”分布形式有所偏差, 而可能呈某种“类锥形”分布, 即其等折射率面与圆锥面相近或类似, 但不再是准确的锥面。其光学特性也与锥形发散纤维的相似, 这样的纤维称为“类锥形发散梯度折射率纤维”。等折射率面呈指数变化的指数型发散梯度折射率纤维就是一种典型的类锥形发散纤维。本文对这种纤维的光线传输及近轴成像特性作一探讨, 以解决这种类锥形纤维元件的设计问题。

二、类锥形发散纤维的光线轨迹

考虑一指数型发散梯度折射率纤维, 其厚度为 d , 两平行平面端面分别位于坐标 z 轴上的

$z=0$ 和 $z=d$ 处。取直角坐标 (x, y, z) , 且 z 轴与纤维光轴重合, 则发散纤维的折射率分布为^[1]

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 + g^2(z) (x^2 + y^2)] \quad (1)$$

其中 n_0 为纤维轴中心处的折射率, $g(z)$ 为指数型纤维沿 z 轴的梯度参数, 且

$$g(z) = \frac{g_0}{\exp(-z/L)} \quad (0 < z \leq d) \quad (2)$$

式中 $g_0 = g(0)$, L 为一描述折射率沿 z 轴变化的几何参数。由 (1)、(2) 式可得等折射率面方程:

$$r = r_0 \exp(-z/L) \quad (3)$$

式中 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, r_0 为一常数, 由 (3) 式可知, 等折射率面沿 z 轴呈指数型变化(图 1)。

当纤维厚度 d 远小于参数 L 时, $z \ll L$, 因而

$$\exp(-z/L) \approx 1 - z/L,$$

(2)、(3) 式化为

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - z/L} \quad (4)$$

$$r = r_0(1 - z/L) \quad (5)$$

此即为锥形发散梯度折射率纤维的梯度参数及等折射率面方程^[1]。因此, 把指数型发散纤维也称为“类锥形发散纤维”。

当 $L \rightarrow \infty$ 时, $\exp(-z/L) \rightarrow 1$, 显然从 (2) 式得

$$g(z) \equiv g_0,$$

即指数型化为柱形的特例^[3]。可见, 对指数型发散纤维的研究具有一定普遍意义。

在近轴光学近似条件下, 计及方程 (1), 指数型发散梯度折射率纤维的光线方程为

$$\ddot{H}_{1,2}(z) - g^2(z) H_{1,2}(z) = 0 \quad (6)$$

式中 $H_{1,2}(z) \equiv x(z)$ 或 $y(z)$, $\ddot{H}_{1,2}(z) = d^2 H_{1,2}/dz^2$ 。光线的初始条件为

$$H_1(0) = 0 \quad \dot{H}_1(0) = 1 \quad (7 \cdot a)$$

$$H_2(0) = 1 \quad \dot{H}_2(0) = 0 \quad (7 \cdot b)$$

$H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 为光线方程 (6) 的两个线性无关特解, 且 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 及 $\dot{H}_1(z)$ 、 $\dot{H}_2(z)$ 满足如下恒等式

$$\dot{H}_1(z) \cdot H_2(z) - H_1(z) \dot{H}_2(z) = 1 \quad (8)$$

即 Wronskian = 1。

为求解方程 (6), 引入如下变量

$$\alpha(z) = g_0 L \exp(z/L) = g(z) L \quad (9)$$

则方程 (6) 变为

$$H''(\alpha) + \frac{1}{\alpha} H'(\alpha) - H(\alpha) = 0 \quad (10)$$

式中 $H'(\alpha) = dH/d\alpha$, $H''(\alpha) = d^2 H/d\alpha^2$ 。方程 (8) 的一般解为

$$H(\alpha) = A I_0(\alpha) + B K_0(\alpha) \quad (11)$$

其中 $I_0(\alpha)$ 、 $K_0(\alpha)$ 为第一类、第二类零阶变型贝塞尔函数, A 、 B 为两个由初始条件 (7·a)、

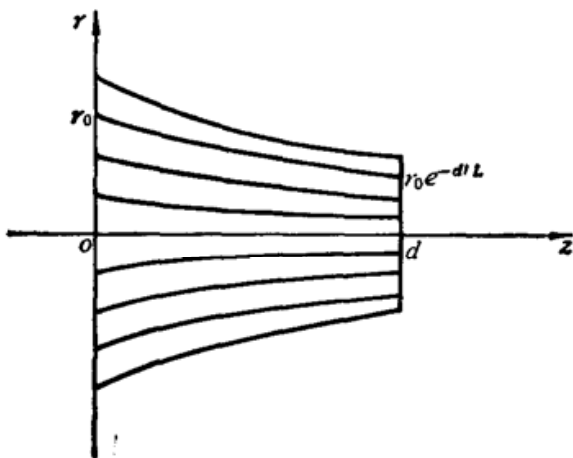


Fig. 1 Exponential-type defocusing GRIN fiber

(7·b) 确定的常数。

将(11)代入(7·a)、(7·b), 并计及(9)式, 可求得如下两个线性无关特解:

$$H_1(z) = L[K_0(b)I_0(\alpha) - I_0(b)K_0(\alpha)] \quad (12)$$

$$H_2(z) = g_0L[-K'_0(b)I_0(\alpha) + I'_0(b)K_0(\alpha)] \quad (13)$$

从(12)、(13)求得斜率方程:

$$\dot{H}_1(z) = \alpha[K_0(b)I'_0(\alpha) - I_0(b)K'_0(\alpha)] \quad (14)$$

$$\dot{H}_2(z) = g_0\alpha[-K'_0(b)I'_0(\alpha) + I'_0(b)K'_0(\alpha)] \quad (15)$$

式中 $\alpha \equiv \alpha(z)$, $b = \alpha(0) = g_0L_0$ 。

方程(12)、(14)和(13)、(15)表示两条特定入射光线在纤维中的传播轨迹。其中光线 1 在端面轴中心以一倾角 $n_0\dot{H}_1(0)$ 入射, 它在纤维中的传播由(12)、(14)式描述; 光线 2 平行于光轴入射, 在纤维中的传播由方程(13)、(15)描述。图 2 给出了光线 1(a)、2(b) 在指数型发散纤维中的传播轨迹。

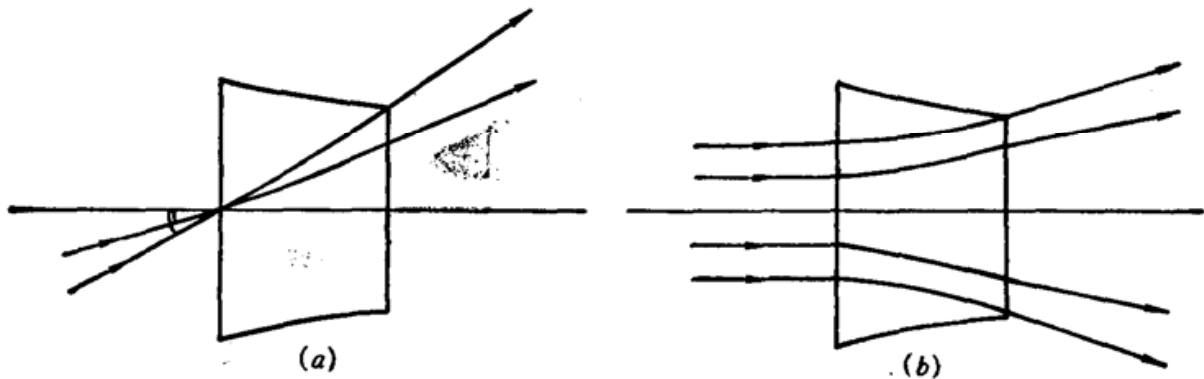


Fig. 2 Ray paths in the exponential-type defocusing GRIN fiber

对于任意入射的光线, 初始条件为

$$H(0) = H_0 \quad \dot{H}(0) = P_0 \quad (16)$$

在纤维中的传播轨迹可表示为如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} H(z) \\ n_0\dot{H}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2(z) & \frac{H_1(z)}{n_0} \\ n_0\dot{H}_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ n_0P_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中矩阵元 H_1 、 H_2 及 \dot{H}_1 、 \dot{H}_2 由式(12)~(15)给出。

三、类锥形发散纤维的成像特性

设物体 AB 位于入射端面前 l_0 处, 经纤维所成的像 $A'B'$ 位于距出射端面 l'_0 处。如图 3 所示。

设 r_1 、 r_2 和 \dot{r}_1 、 \dot{r}_2 分别表示光线在物面、像面上的位置和倾角, 则成像系统可用如下矩阵表示^[4]:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 + n_0l'_0\dot{H}_2 & \frac{H_1}{n_0} + l'_0\dot{H}_1 - l_0H_2 - n_0l_0l'_0\dot{H}_2 \\ n_0\dot{H}_2 & \dot{H}_1 - n_0l_0\dot{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

根据光学系统成像矩阵的性质可得如下物像关系式:

$$l'_0 = \frac{n_0 l_0 H_2 - H_1}{n_0 [\dot{H}_1 - n_0 l_0 \dot{H}_2]} \quad (19)$$

和像的放大率 β :

$$\beta = \frac{1}{\dot{H}_1 - n_0 l_0 \dot{H}_2} \quad (20)$$

将(12)~(15)式代入(19)、(20)式得

$$l'_0 = -\frac{L}{n_0 \alpha} \cdot \frac{[K_0(b) I_0(\alpha) - I_0(b) K_0(\alpha)] + n_0 g_0 l_0 [K'_0(b) I_0(\alpha) - I'_0(b) K_0(\alpha)]}{[K_0(b) I'_0(\alpha) - I_0(b) K'_0(\alpha)] + n_0 g_0 l_0 [K'_0(b) I'_0(\alpha) - I'_0(b) K'_0(\alpha)]} \quad (21)$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \{ [K_0(b) I'_0(\alpha) - I_0(b) K'_0(\alpha)] + n_0 g_0 l_0 [K'_0(b) I'_0(\alpha) - I'_0(b) K'_0(\alpha)] \}^{-1} \quad (22)$$

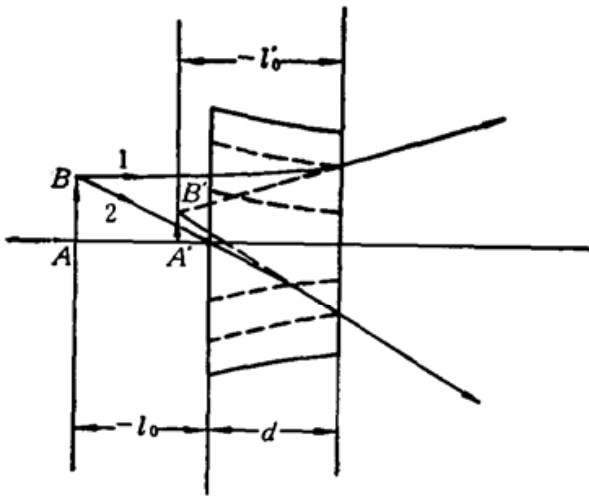


Fig. 3 Image geometry of the exponential-type defocusing GRIN fiber

当 $l'_0 > 0$ 时成实像, $l'_0 < 0$ 时成虚像; $\beta > 0$ 为正立像, $\beta < 0$ 为倒立像, $|\beta| > 1$ 为放大像, $|\beta| < 1$ 为缩小像。

由(21)式, 令 $l'_0 \rightarrow \infty$ 得物方焦点位置:

$$l_f = \frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{K_0(b) I'_0(\alpha) - I_0(b) K'_0(\alpha)}{I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)} \quad (23)$$

由(22)式, 令 $\beta = 1$ 得物方主面位置:

$$l_h = \frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{K_0(b) I'_0(\alpha) - I_0(b) K'_0(\alpha) - \alpha^{-1}}{I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)} \quad (24)$$

所以物方焦距为

$$f = l_f - l_h = \frac{1}{n_0 g_0 \alpha} \cdot \frac{1}{[I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)]} \quad (25)$$

由(21)式, 令 $l_0 \rightarrow \infty$ 得像方焦点位置:

$$l'_f = \frac{L}{n_0 \alpha} \cdot \frac{K'_0(b) I_0(\alpha) - I'_0(b) K_0(\alpha)}{I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)} \quad (26)$$

将 $l = l_h$ 代入(21)式得像方主面位置:

$$l'_h = \frac{1}{n_0 g_0 \alpha} \cdot \frac{g_0 L [K'_0(b) I_0(\alpha) - I'_0(b) K_0(\alpha)] + 1}{I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)} \quad (27)$$

则像方焦距为

$$f' = l'_f - l'_h = -\frac{1}{n_0 g_0 \alpha} \cdot \frac{1}{[I'_0(b) K'_0(\alpha) - K'_0(b) I'_0(\alpha)]} \quad (28)$$

以上各式 $\alpha \equiv \alpha(z)$ 。对给定厚度为 d 的梯度折射率纤维, $z = d$, 则

$$\alpha = \alpha(d) = g_0 L \exp\left(\frac{d}{L}\right)。$$

如物距和像距以主面为基准计算, 则物像公式(21)可表示为高斯公式。

已知纤维的参数为

$$n_0 = 1.5722, \quad g_0 = 0.2599, \quad L = 15,$$

$$d = 1.5, \quad r_1 = 1.0, \quad r_2 = r_1 \exp\left(-\frac{d}{L}\right) = 0.905。$$

则类锥形发散纤维的高斯参数为:

(下转第 544 页)

总之,本文提出了一种可以全并行地实现多对矢量外积的光学系统的原理,它非常简单,且容易做到较大维数,就目前日常光学元件而言,利用这一系统做 10^4 对维数为 10^4 的矢量外积(模拟运算)是可以做到的。利用该系统可以直接实现两个(正实数)矩阵和三个(正实数)矩阵的乘法(模拟运算),验证本文理论的原理实验研究结果,将另文发表。(见本刊下期)

在模拟矩阵乘法器硬件研究的基础上,本文讨论了相应的算法,使该系统的应用范围扩大到实数矩阵乘法,并利用空间光强混合编码方法,实现了二个和三个数字(混合基)矩阵乘法,提高了运算精度。本文提出的全并行三个矩阵乘法器与国内外现有的其它两种(基于内积和傅里叶变换)全并行三个矩阵乘法器相比,在应用于实数域二维线性变换时,它具有一个极为突出的优点:只要用光源列阵表示图型点阵,变换核做成固定的编码板,一次得出变换结果,无需空间光调制器件(这是因为当 3 个矩阵 A 、 B 、 C 相乘,本文提出的系统中矩阵 B 为光源列阵表示,而目前其它任何一种三个矩阵相乘系统都是用光源表示 A)。因此这个三矩阵乘法系统在二维变换中值得推广应用。

(上接第 548 页)

$$l_h \sim 0.463 \quad l_f \sim 6.063 \quad l'_h \sim -0.463 \quad l'_f \sim -6.064 \quad f' = -f \sim -5.600$$

根据本文结果(19)~(28),即可进行类锥形发散纤维透镜的成像分析及元件的设计。随着梯度折射率光学理论及其应用研究的迅速发展,类锥形发散纤维元件可望在消色差梯度折射率光学成像系统中发挥一定作用。

参 考 文 献

- 1 廖廷倮,中国激光,16(5),267~271(1989)
- 2 廖廷倮,应用激光,8(2),80~84(1988)
- 3 殷宗敏,激光,9(2),65~68(1982)
- 4 廖廷倮,中国激光,17(5),273(1990)

(上接第 560 页)

Table 1 Comparison of detection limits for various trace-element analysis methods

Element	LEI (ng/ml)	AES ($\mu\text{g/ml}$)	AA(in Flame) ($\mu\text{g/ml}$)	ICP-AES (ng/ml)
Sm	2.5 ($\lambda=573.295 \text{ nm}$)	10	2 ($\lambda=429.67 \text{ nm}$)	10

参 考 文 献

- 1 R. B. Green *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **29**, 297(1976)
- 2 张在宣 *et al.*, 中国激光,15, 623(1988); *Chinese Physics-Lasers*, **13**, 737(1988)
- 3 O. Axner *et al.*, *Appl. Spectroscopy*, **41**, 19(1987)
- 4 G. C. Turk *et al.*, *Appl. Spectroscopy*, **40**, 146(1986)
- 5 O. Axner *et al.*, *Anal. Spec.*, **41**, 19(1987); I. V. Bykov, *et al.*, *J. Phys. Collog.*, **44**, 343(1983)
- 6 彭慰先,张在宣 *et al.*, 光谱学与光谱分析,8(4),1(1988)
- 7 J. B. Willis, *CRC Handbook of Spectroscopy**, Ed. by J. W. Rubinson, 1974, **1**, 814, CRC Press, Cleveland, Ohio
- 3 Winge *et al.*, *Appl. Spec.*, **33**, 281(1979)

(收稿日期:1989年6月2日)