

光学全并行矩阵乘法*

钱秋明 李庆熊 赵建明 王之江

(中国科学院上海光机所, 201800)

提要: 本文提出一种只用极少数成像系统就能完成的一种全并行矩阵运算器。

关键词: 光计算, 并行矩阵, 图像处理

Optical parallel multiple matrice multiplier

Qian Qiuming, Li Qingxiang, Zhao Jianming, Wang Zhijiang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

Abstract: A novel parallel multiple matrice multiplier based on outer product decomposition is proposed. The optical system includes only one light source array, five lenses and two SLM which can be replaced by two masks in this preliminary study. Besides the analog multiplications of matrices, one polarization and rotation encoding method are introduced and applied to digital optical two dimension transform.

Key words: optical computation, information processing, image processing

许多科学研究和工程技术中的计算问题最后都归结为代数运算问题, 因此研制解决复杂的代数运算的专用器件, 一直被人们重视。

本文提出一种只用极少数成像系统就能完成的一种全并行矩阵运算器, 它基于光学全并行多对矢量外积乘法器和矩阵乘法的相应分解。用它可以实现实数模拟矩阵乘法、模拟二维变换、数字精度矩阵乘法和数字精度二维变换。所有运算都充分利用了光的并行性, 做一次三个矩阵乘法或二维变换只要一个系统时钟周期。

一、全并行矩阵运算器的结构

1.1 两个矩阵相乘

矩阵乘法可以分解为多组矢量内积或多组矢量外积(也叫张量积)。

图1描述了一种全新的基于矢量外积的全并行光学矩阵乘法系统。该系统中采用 n 个点光源放置于球透镜系统的焦面上作为照明光, 图中 SL 和 CL 分别为球透镜和柱透镜, 它们的焦距有以下关系:

$$f_{SL_1} = f_{OL_1} = f_{CL_1} = f_{OL_2} = f,$$

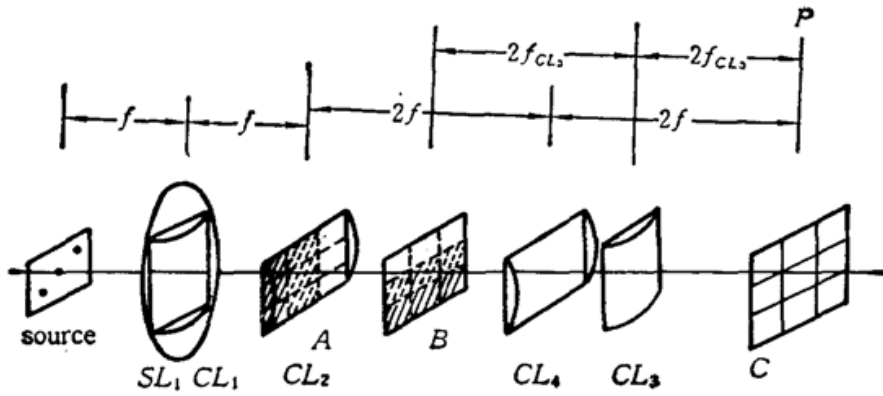


Fig. 1 Optical matrix-matrix product based on N vector-vector outer products

$$f_{CL_3} = 3f/4$$

图中用于输入矩阵的空间光调制器用 A 、 B 表示, 在此把它们叫做输入编码板, 它们各单元的光强透过率与矩阵元素值成正比。因此这里必须首先假定所输入的矩阵每个元素都为正实数, 对于非正实数的各种情形, 可以采用各种算法, 即使是复数也同样可以对输入矩阵做适当编码后变成实数矩阵再输入。在图 1 所示的系统中, 乘法与加法的完成与内积做矩阵乘法时完全一样。图 1 给出此光学系统的原理图。很显然, 这是一个正交成像的非球面光学系统。

假如光源为理想点光源, 而且所有透镜为理想成像透镜(不考虑任何像差, 柱透镜只在一个方向成像), 则矩阵 A 编码板和 B 编码板将按图 1 中的方式放置, 如果点光源的强度分别为 $I_0\delta(X-X_0)\delta(Y-Y_0)$, $I_1\delta(X-X_1)\delta(Y-Y_1)$, $I_2\delta(X-X_2)\delta(Y-Y_2)$, $\dots\dots I_{(n-1)}\delta(X-X_{n-1})\delta(Y-Y_{n-1})$, A 、 B 编码板的透过率为 (A_{ik}) , (B_{kj}) , 很显然, 在 P 平面上得到以下强度分布:

$$O'_{ij} = G \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} B_{kj} I_k$$

如果取 $I_0 = I_1 = \dots\dots = I_{n-1} = I$, 则就可以得到:

$$O_{ij} = O'_{ij}/GI = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} B_{kj} \dots\dots \quad (1)$$

这就是矩阵 A 和矩阵 B 的乘积。当然透过率总是小于 1, 实际上总是需要乘上一定的比例因子。关于(1)式的严格推导, 可以采用传递函数方法。

1.2 三个矩阵相乘

如果要进行三个矩阵的乘法, 则可以采用图 2 所示的系统。它和图 1 的差别在于光源不同。图 2 中用 $n \times n$ 个光源照明(假定 B 为 $n \times n$ 维)。如果要进行相乘的三个矩阵为 (A_{ij}) 、

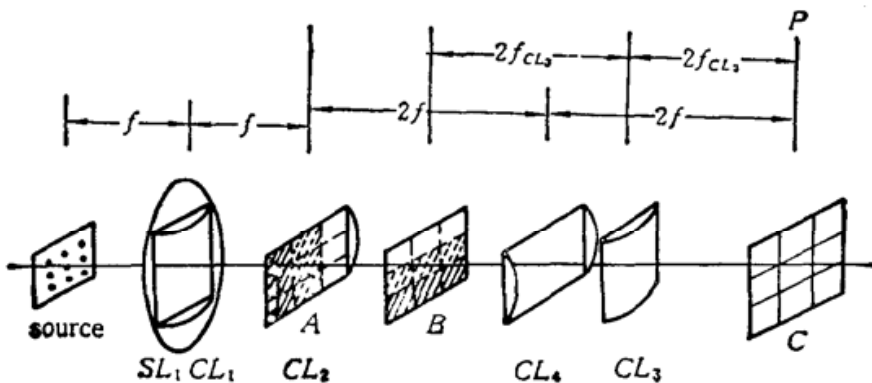


Fig. 2 Optical three matrix product based on N vector-vector outer products

(B_{ij}) 、 (C_{ij}) , 则如图 2 放置 A 、 C , 每个光源的发光强度正比于矩阵 B_{ij} , $i, j=0, 1, \dots, n-1$, 且相互位置如图 2 所示, 则显然在 P 平面上的光强分布为

$$D_{1m} \sim \sum_{i,j=0}^{n-1} A_{1i} B_{ij} C_{jm} \quad (2)$$

其中符号“ \sim ”表示“正比于”, 这就是三个矩阵相乘的结果。请注意式(2)中三个矩阵和图 2 中三个矩阵的次序不一样, 这正好为更多矩阵相乘提供了方便。

二、全并行光学乘法器中的算法及其光学二维变换

由于光强只能为正, 所以前一节中所述的矩阵各元素都假定为正, 对于一般的矩阵乘法, 则矩阵中的元素有可能是一般的实数和复数。这就必须采用一些必要的方法。

本文提出一种利用偏振编码和光强编码相结合的方法, 以达到实现光学二维交换的目的。

2.1 实数的光强偏振混合编码表示和运算

(1) 实数的表示

为了用光强和偏振表示一个实数, 可以利用光强的大小表示数的绝对值, 以两个不同的偏振方向分别表示数的两个不同符号。基于这一想法, 首先把一个任意实数表示成如下形式:

$$M = |M| [1 + \text{sign}(M)]/2(+1) + |M| [1 - \text{sign}(M)]/2(-1)$$

其中

$$\text{sign}(M) = \begin{cases} +1 & M > 0 \\ 0 & M = 0 \\ -1 & M < 0 \end{cases} \quad (3)$$

在光学上, 以 e_x 和 e_y 表示光的两个独立正交偏振方向, 并设定 e_x 对应 $(+1)$, e_y 对应 (-1) , 则表示数 M 的光束的两个偏振分量 $\{I_x, I_y\}$ 取如下值:

$$\begin{cases} I_x = |M| [1 + \text{sign}(M)]/2 \\ I_y = |M| [1 - \text{sign}(M)]/2 \end{cases} \quad (4)$$

这样就有

$$M = I_x e_x + I_y e_y$$

且

$$I_x I_y = 0 \quad (5)$$

显然这样的表示是唯一的。为了实际使用中的需要, 更一般地, 表示数 M 的光束的两个独立偏振分量, 取如下值:

$$\begin{cases} I_x = |M| [1 + \text{sign}(M)]/2 + C \\ I_y = |M| [1 - \text{sign}(M)]/2 + C \\ C \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

此时表示不是唯一的。

(2) 算术运算:

如果要进行两个实数的乘法运算, 则采用(4)、(5)式中的表示方法, 即

$$\begin{aligned} M &= I_{Mx} e_x + I_{My} e_y \\ N &= I_{Nx} e_x + I_{Ny} e_y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_{Mx} = |M| [1 + \text{sign}(M)]/2 \\ I_{My} = |M| [1 - \text{sign}(M)]/2 \\ I_{Nx} = |N| [1 + \text{sign}(N)]/2 \\ I_{Ny} = |N| [1 - \text{sign}(N)]/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MN &= |M| |N| [1 + \text{sign}(M)\text{sign}(N)]/2 e_x \\ &\quad + |M| |N| [1 - \text{sign}(M)\text{sign}(N)]/2 e_y \\ &= |MN| [1 + \text{sign}(MN)]/2 e_x + |MN| [1 - \text{sign}(MN)]/2 e_y \end{aligned} \quad (7)$$

在光学上对用(4)、(5)式表示的两个实数的相乘, 可以用两个偏振光输入到两个透射板上, 如果透过率为 $\eta_1\eta_2$, 则:

$$I = \eta_1\eta_2 [I_{0x}e_x + I_{0y}e_y] \quad (I_{0x}I_{0y} \equiv 0)$$

为了表示两个数的符号运算, 可以在透射板上贴上一层旋光材料, 透过率和旋光角度一起就能表示一个带符号数 M , 当 $M < 0$ 时, 贴上一层旋光材料, 使入射光的偏振方向旋转 90° , 当 $M \geq 0$ 时不贴旋光材料, 使入射光的偏振方向保持不变, 同时令 $\eta_1 = |M|$ 。入射光的强度表示 N 的值, 偏振方向表示 N 的符号。此时输出光就表示 $(M \cdot N)$, 即(7)式中两个实数相乘的结果。

如果要进行加减法, 则必须用(6)中的表示方法, 此时表示不是唯一的。例如, 对两个大于 0 的实数 A 、 B 做减法, 即 $C = A - B$, 则它的结果可以表示为

$$C = I_{Ax}e_x + I_{By}e_y$$

此时减法成为在表示负值的偏振分量上加一个正值。

显然在进行加减法运算后, 必须经过一次数的表示方法转换才能进行乘法运算, 但在光学上直接进行这种转换将会很困难, 因此一般采用电的方法。

2.2 光强偏振混合编码二维变换

任何复数域上的二维线性变换可以归纳为四个独立的实数变换。因此本节将只讨论实数域上的二维线性变换(如不特别说明以后都简称为二维变换)。

任何二维变换都可以表示为如下形式:

$$E = UVV$$

其中 F 为被变换矩阵, U 、 V 是变换核, E 为变换结果。如果用前面所述的方法表示 F_{ij} , 则 $|U_{ij}|$, $|V_{ij}|$ 以编码板的透过率表示, $\text{sign}(U_{ij})$, $\text{sign}(V_{ij})$ 用贴旋光材料的方法表示, 此时实现这一变换的光学系统如图 2 所示, 光源为

$$F_{ij} = |F_{ij}| \delta(x-x_i) \delta(y-y_j) \{ [1 + \text{sign}(F_{ij})]/2 e_x + [1 - \text{sign}(F_{ij})]/2 e_y \}$$

编码板为

$$U_{ij} = |U_{ij}| \delta(x-x_i) \delta(y-y_j) \{ [1 + \text{sign}(U_{ij})]/2 e_x + [1 - \text{sign}(U_{ij})]/2 e_y \}$$

$$V_{ij} = |V_{ij}| \delta(x-x_i) \delta(y-y_j) \{ [1 + \text{sign}(V_{ij})]/2 e_x + [1 - \text{sign}(V_{ij})]/2 e_y \}$$

在确定的某一类或某种二维变换中, U_{ij} 和 V_{ij} 是不变的, 因此可以把它们做成固定的编码板, 这样整个系统中就无需空间光调制器作为输入器件, 只要两个可调制的光源列阵, 如果 F_{ij} 全部大于 0, 此时就更为简单, 只要一个光源列阵就可以了, 这就极为方便。

对于图 1 中所接收到的两个偏振分量, 只要把它们一一对应相减就可以了, 这只要注意到表达式(6), 结论是很明显的。两个偏振分量的相减可以在电路上完成, 不必采用光学方法。

总之,本文提出了一种可以全并行地实现多对矢量外积的光学系统的原理,它非常简单,且容易做到较大维数,就目前日常光学元件而言,利用这一系统做 10^4 对维数为 10^4 的矢量外积(模拟运算)是可以做到的。利用该系统可以直接实现两个(正实数)矩阵和三个(正实数)矩阵的乘法(模拟运算),验证本文理论的原理实验研究结果,将另文发表。(见本刊下期)

在模拟矩阵乘法器硬件研究的基础上,本文讨论了相应的算法,使该系统的应用范围扩大到实数矩阵乘法,并利用空间光强混合编码方法,实现了二个和三个数字(混合基)矩阵乘法,提高了运算精度。本文提出的全并行三个矩阵乘法器与国内外现有的其它两种(基于内积和傅里叶变换)全并行三个矩阵乘法器相比,在应用于实数域二维线性变换时,它具有一个极为突出的优点:只要用光源列阵表示图型点阵,变换核做成固定的编码板,一次得出变换结果,无需空间光调制器件(这是因为当 3 个矩阵 A 、 B 、 C 相乘,本文提出的系统中矩阵 B 为光源列阵表示,而目前其它任何一种三个矩阵相乘系统都是用光源表示 A)。因此这个三矩阵乘法系统在二维变换中值得推广应用。

(上接第 548 页)

$$l_h \sim 0.463 \quad l_f \sim 6.063 \quad l'_h \sim -0.463 \quad l'_f \sim -6.064 \quad f' = -f \sim -5.600$$

根据本文结果(19)~(28),即可进行类锥形发散纤维透镜的成像分析及元件的设计。随着梯度折射率光学理论及其应用研究的迅速发展,类锥形发散纤维元件可望在消色差梯度折射率光学成像系统中发挥一定作用。

参 考 文 献

- 1 廖廷倮,中国激光,16(5),267~271(1989)
- 2 廖廷倮,应用激光,8(2),80~84(1988)
- 3 殷宗敏,激光,9(2),65~68(1982)
- 4 廖廷倮,中国激光,17(5),273(1990)

(上接第 560 页)

Table 1 Comparison of detection limits for various trace-element analysis methods

Element	LEI (ng/ml)	AES ($\mu\text{g}/\text{ml}$)	AA(in Flame) ($\mu\text{g}/\text{ml}$)	ICP-AES (ng/ml)
Sm	2.5 ($\lambda=573.295 \text{ nm}$)	10	2 ($\lambda=429.67 \text{ nm}$)	10

参 考 文 献

- 1 R. B. Green *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **29**, 297(1976)
- 2 张在宣 *et al.*, 中国激光,15, 623(1988); *Chinese Physics-Lasers*, **13**, 737(1988)
- 3 O. Axner *et al.*, *Appl. Spectroscopy*, **41**, 19(1987)
- 4 G. C. Turk *et al.*, *Appl. Spectroscopy*, **40**, 146(1986)
- 5 O. Axner *et al.*, *Anal. Spec.*, **41**, 19(1987); I. V. Bykov, *et al.*, *J. Phys. Collog.*, **44**, 343(1983)
- 6 彭慰先,张在宣 *et al.*, 光谱学与光谱分析,8(4),1(1988)
- 7 J. B. Willis, *CRC Handbook of Spectroscopy**, Ed. by J. W. Rubinson, 1974, **1**, 814, CRC Press, Cleveland, Ohio
- 3 Winge *et al.*, *Appl. Spec.*, **33**, 281(1979)

(收稿日期:1989年6月2日)