

直接解相干方程计算全息元件的参数*

王永昭 C.S.Ih 张以谟
(天津大学精密仪器工程系, 300072)

提要: 此文深入讨论用解相干方程式的方法, 直接连续获得用于计算机产生全息光学元件的计算参数。

关键词: 相干方程, 全息元件

HOE to computed by directly solving coherent equation

Wang Yongzhao, C. S. Ih, Zhang Yimo

(Department of Precision Instruments Engineering, Tianjin University, Tianjin)

Abstract: A new method to computation of HOE by direct solving coherent equations is discussed in depth. The parameters of CGHOE can be obtained directly if the method is used in the computation.

Key words: coherent equations, HOE

著作[1~3]及其参考文献对 CGHOE 作了开拓性的论述, [4]讨论了 CGHOE 的计算方法。本文求解平面波与球面波及平面波之间的相干系统的方程式, 直接连续获得用于计算机产生全息光学元件的计算参数。此方法已被理论和实际干涉系统所证实。

一、空间频率与干涉级次之间的关系

1.1 概述

假设一平面准直波与球面波相干系统, 如图 1 所示, 可以将光波分别表示为

$$W_{pv_1}(x, y, z) = E_p \exp \left[-i2\pi \left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - (\eta\lambda)^2]^{1/2} \cdot z + \eta y \right\} \right] \quad (1)$$

$$W_{sv_1}(x, y, z) = E_s \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \right] \right\} \quad (2)$$

式中 W_{pv_1} 、 W_{sv_1} 为在 y_{10} 点上的平面波与球面波。当光波传播到 y_{20} 点时的波方程为

$$W_{pv_2} = E_p \exp \left[-i2\pi \left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - (\eta\lambda)^2]^{1/2} z + \eta(y - o) \right\} \right] \quad (3)$$

$$W_{sv_1} = E_s \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x^2 + z^2 + (y-c)^2)^{1/2} \right] \right\} \quad (4)$$

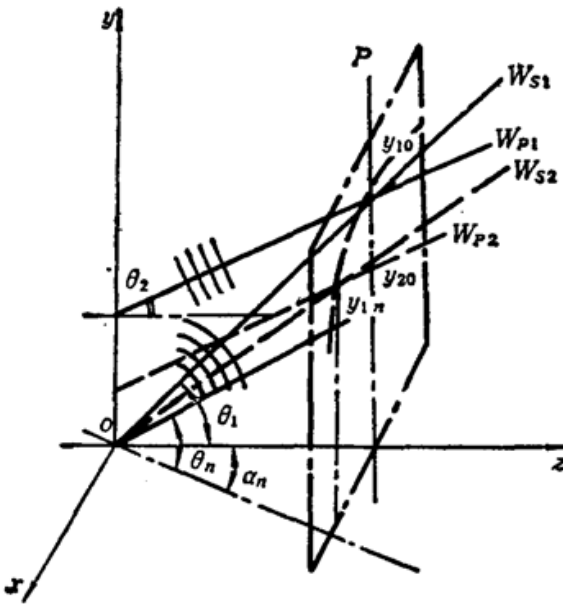


Fig. 1 A HOE computing system of interference between the spherical wave and the plane waves

式中空间频率数 $\eta = \sin \theta_2 / \lambda$; C 为从 y_{10} 到 y_{20} 之间的间距, 对 1 mm 空间频率数, C 可取为 1。可将相干方程写成:

$$\begin{aligned} \phi_{sv_1} - \phi_{sv_2} &= 2\pi M_{v_1}, \quad \phi_{sv_1} - \phi_{sv_2} \\ &= 2\pi M_{y_1} \end{aligned} \quad (5)$$

设 $\Delta \xi_{y_1-y_2}$ 相当于在 y_1 和 y_2 之间平均每毫米具有的空间频率数, 近似为

$$\Delta \xi_{y_1-y_2} = \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Delta L_{v_1}}{\partial y \lambda} + \frac{\partial \Delta L_{v_2}}{\partial y \lambda} \right) / 2 \right] [y_1 - y_2] \right\} \quad (6)$$

ΔL_{v_1} 、 ΔL_{v_2} 为干涉方程的光程差。在线性条件下它足够精确, 在非线性条件下空间频率取整数时仅为参考值。因此可得

$$\begin{aligned} [M_{v_1} - M_{v_2}] &= \Delta M (y_1 - y_2) \\ &= \Delta \xi (y_1 - y_2) \quad (\text{取整数}) \end{aligned} \quad (7)$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta \xi_{y_1-y_2} &= \left\{ [\eta \lambda] - \left[\frac{1}{2} (y^2 + z^2 + x^2)^{-1/2} (2y) \right] \right\} / \lambda \\ &\quad + \left\{ (\eta \lambda) - \frac{1}{2} [(y-c)^2 + z^2 + x^2]^{-1/2} [2(y-c)] \right\} / 2\lambda \{y_1 - y_2\} \\ &= \{ (2\eta \lambda) - (y^2 + z^2 + x^2)^{-1/2} \cdot y \} - \{ [y^2 - 2y + 1 + z^2 + x^2]^{-1/2} [y - 1] \} / 2\lambda \quad (\text{设 } c=1) \end{aligned} \quad (8)$$

而干涉级次为

$$\begin{aligned} \Delta M_{v_1-v_2} &= [y \eta \lambda + [1 - (\lambda \eta)^2]^{1/2} \cdot z] - (y^2 + z^2 + x^2)^{1/2} \\ &\quad - \{ [(y-c) \eta \lambda + [1 - (\eta \lambda)^2]^{1/2} \cdot z] - [(y-c)^2 + z^2 + x^2]^{1/2} \} / \lambda \\ &= \{ (\eta \lambda) + [x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2]^{1/2} - (y^2 + z^2 + x^2)^{1/2} \} / \lambda \end{aligned} \quad (9)$$

为了说明方程(7)在非线性相干系统也可适用, 将一组平面波与球面波相干参数代入(8), (9)方程式。例 1: $\theta_1 = 77^\circ$, $\theta_2 = 71^\circ$, $y = 5.631$ (mm), $z = 1.3$ (mm) 可求得 $\Delta M_{(v_1-v_2)} \approx 37$, $\Delta \xi_{(y_1-y_2)} \approx 37$ (均取整数值)。在实际计算时以 ΔM 为依据, 故方程(7)可用来作为判断的准则。

在傍轴条件下, 空间频率数 $\xi_{y_1-y_2}$ 可以将其展开, 当干涉角为 $+\theta_1$ 和 $-\theta_2$ 系统, $c=1$ 时, 可将其整理为

$$\Delta \xi_{y_1-y_2} = \left\{ \left[-2 \cdot (\eta \lambda) - \left(\frac{y}{z} - \frac{y^3}{2z^3} \right) \right] - \left[\frac{1}{z} - \frac{(y-1)^2}{2z^3} \right] \cdot (y-1) \right\} / 2\lambda$$

进一步可简化为

$$\Delta \xi_{y_1-y_2} = \left\{ 2(\eta \lambda) + \frac{1}{z} (2y - 1) \right\} / 2\lambda \quad (10)$$

1.2 平面波之间相干的空间频率与干涉级次的求解

与图 1 相似, 仅将 W_{s_1} 、 W_{s_2} 改为 W_{sv_1} 、 W_{sv_2} 的平面波, 这时在 y_{10} 点的干涉级次为

$$M_{y_1} = [z\{[1 - (\eta_1\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\} + y_1\{\lambda(\eta_1 - \eta_2)\}]/\lambda \quad (11)$$

与此相似,可以写出在 y_{20} 点的干涉级次为

$$M_{y_2} = [z\{[1 - (\eta_3\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\} + y_2\{\lambda(\eta_3 - \eta_2)\}]/\lambda \quad (12)$$

式中 $\eta_3 = \sin \theta_3/\lambda$, θ_3 为 W_{y_2} 波矢量与 z 轴之间的夹角。

$$\begin{aligned} \Delta M_{(y_1-y_2)} = M_{y_1} - M_{y_2} = & \{y_1(\eta_1\lambda) + (y_1 - y_2)(\eta_2\lambda) \\ & + z\{[1 - (\eta_1\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_3\lambda)^2]^{1/2}\} - y_2(\eta_3\lambda)\}/\lambda \end{aligned} \quad (13)$$

在以下空间频率数的求解中,由解干涉方程获得在 y_1 点的 M_1 之后,由 M_1+1 求其次一点,这里表示为 y'_1 。 $\xi_{y_1} = 1/\Delta y_1$, $\Delta y_1 = (y_2 - y'_1)$ 。同理可以求得在 y_2 点的 ξ_{y_2} :

$$\begin{aligned} \xi_{y_1} = & [(\eta_1\lambda) - (\eta_2\lambda)]/(M_{y_1}+1)\lambda - z\{[1 - (\eta_1\lambda)^2]^{1/2} \\ & - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\} - (M_{y_1}\lambda - z\{[1 - (\eta_1\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\}) \\ = & [\eta_1\lambda - \eta_2\lambda]/\lambda \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi_{y_2} = & [(\eta_3\lambda) - (\eta_2\lambda)]/(M_{y_2}+1)\lambda - z\{[1 - (\eta_3\lambda)^2]^{1/2} \\ & - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\} - (M_{y_2}\lambda - z\{[1 - (\eta_3\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}\}) \\ = & [(\eta_3\lambda) - (\eta_2\lambda)]/\lambda \end{aligned} \quad (15)$$

公式(14), (15)说明这一推导是正确的。空间频率数和干涉级次之比值(当 $(y_1 - y_2) = 1$)为

$$\begin{aligned} \Delta M/\Delta \xi = & \{y_1(\eta_1\lambda) - (\eta_2\lambda) + z\{[1 - (\eta_1\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\eta_3\lambda)^2]^{1/2}\} \\ & - y_2(\lambda\eta_3)\} \cdot 2/[(\eta_1\lambda) + (\eta_3\lambda) - 2(\lambda\eta_2)] \end{aligned} \quad (16)$$

这里可以用方程(16)来说明方程(7)的适用性。验算如下两组数据,例2, $\theta_1 = +77.0^\circ$, $\theta_2 = +71.0^\circ$, $\theta_3 = +74.3^\circ$ 两相干光之间夹角 $\Delta\beta = 6^\circ$, 从 y_1 到 y_2 之间的间距为 1 mm 可求得 $\Delta M/\Delta \xi = 1.02$ 。例3, $\theta_1 = +77.0^\circ$, $\theta_2 = +37.0^\circ$, $y_1 = 5.631(\text{mm}) + \theta_3 = 74.3^\circ$, 可求得 $\Delta M/\Delta \xi = 1.00$, 说明方程(7)是精确的。

另外还可由两平面波之间相干求解,空间频率应具有等频的特性来说明上述计算的正确。

1.3. 平面波与球面波相干的空间频率数及干涉级次关系的求解

同样可以利用方程式(7)的准则来讨论这一系统。仿效上述的程序,可以得出在 y_{10} 点处的空间频率数:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_{y_1} = & (\{-\eta^2\lambda^2 \pm [M_1\lambda + z[1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}]^2 \\ & + \lambda^2(2M_1+1) + 2\lambda z[1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2} \\ & - z^2[1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2} \\ & \mp [(M_1\lambda + z[1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2})^2 \\ & - z^2[1 - (\eta_2\lambda)^2]^{1/2}]/ \\ & - [1 - (\eta_2\lambda)^2]^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

与此相似,对于在 y_{20} 点的空间频率数 $\Delta \xi_{y_2}$, 可以将公式(17)的 M_1 值由在 y_{20} 点的 M_2 值来替代。

这样在 y_{10} 和 y_{20} 这两点上可解得八个 $\Delta \xi_{y_n}$ 值,对于这些空间频率数的选择,可以运用四

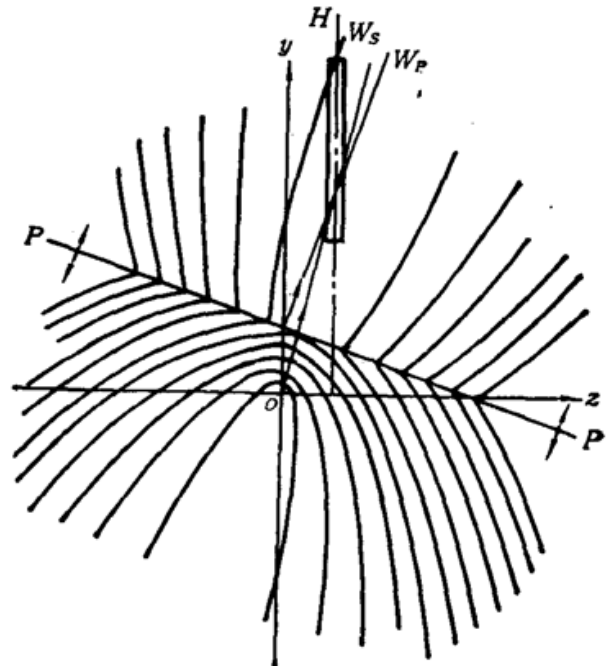


Fig. 2 A particular cross section of maximum intensity contour surfaces resulting from an interference system between the spherical wave and the plane wave

个干涉级数 $(M_{y1})_1$ 、 $(M_{y2})_1$ 和 $(M_{y1})_2$ 、 $(M_{y2})_2$ 来进行比较判别。在不能确定时，可以借助图解进行分析，其结果示于图 2。它是由例 1 参数绘制的。由图上可以看出，在此条件下可能记录的干涉条纹很少，且不可能是另一组很高的数值。这一判断过程的程序示于图 3。

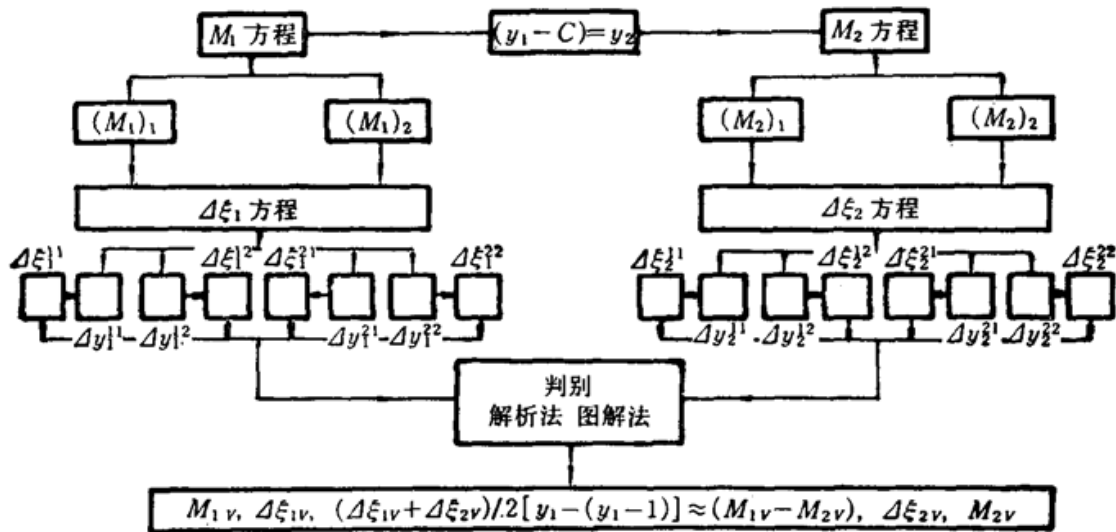


Fig. 3 Program to determine the interference order by solving coherent equation

以例 1 参数为依据布置了如图 1 的干涉系统，用于进行实际观察。由读数显微镜沿光栅矢量的垂直方向测出在光栅矢量的平面上形成的干涉条纹数为 164 条/mm，可以求得在 y 平面上的 y_{10} 点所应记录的空间频率数为 45.2 条/mm，这一数值与上述解方程的结果相一致。

二、矢量法表示相干方程

与图 1 相似，但系统中改变了坐标，可将波方程描写为(见图 4)

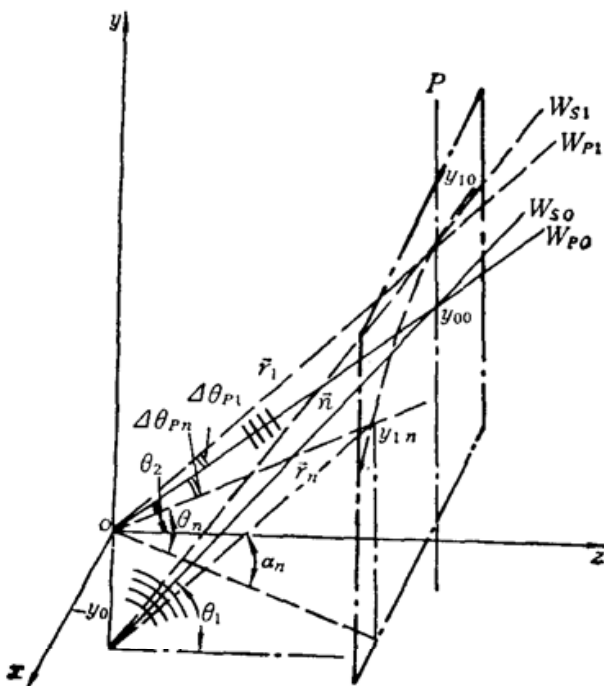


Fig. 4. Vector is used to express the coherent equation after the coordinate system is changed

$$W_{s1} = \exp\left\{-i\left[\frac{2\pi}{\lambda} |R|\right]\right\} \quad (19)$$

$$|R| = [x^2 + (y_1 + y_0)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$W_{p1} = \exp\left\{-i\frac{2\pi}{\lambda} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}]\right\} \quad (20)$$

在 y_{00} 点， $\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}$ 。已知 y_{00} 点的干涉级数为 M_1 ，为了求得 y_{10} 的数值，相干方程由 $M_1 + 1$ 后可以写出：

$$\begin{aligned} \{x^2 + (y_1 + y_0)^2 + z^2\}^{1/2} &= \{(M + 1)\lambda \\ &+ [y_2(\eta'\lambda) + z[1 - (\lambda\eta')^2]^{1/2}] \\ &\times \{[1 - (\eta'\lambda)^2]^{1/2} \cdot [1 - (\eta\lambda)^2]^{1/2} \\ &+ \eta \cdot \eta'\lambda^2\} \end{aligned} \quad (21)$$

展开并简化后根据计算孔径大小的不同，可将方程式(21)表示为与概述中所叙述的形式，即

$$\begin{aligned} \{x^2 + (y_1 + y_0)^2 + z^2\}^{1/2} \\ = \{(M + 1)\lambda + [y_1(\eta\lambda) + z[1 - (\eta\lambda)^2]^{1/2}]\} \end{aligned}$$

这里 $\eta' = [\sin[\theta_2 + \Delta\theta_{pi}]]/\lambda$, $\eta = \sin \theta_2/\lambda$, η' 表示 θ_2 角增至 $\theta_2 + \Delta\theta_{pi}$ ($i=1$) 时, 光波所拥有的空间频率数。

感谢历届学生跟我在这方面做过的一些有益的工作, 感谢计算中心绘图室的协助; 特别要感谢母国光、刘经逵所给予的关心帮助。

参 考 文 献

- 1 Robert J. Collier, Christoph B. Burkhhardt, Lawrence H. Lin, *Optical Holography*, Academic Press, New York and London, 1971, p.543
- 2 W. -H. Lee, *Proc. of SPIE*, Vol. 126, August 25~26, 1977, p. 54
- 3 T. -C. Lee, P. N. Pamura, *Proc. of SPIE*, Vol. 215, 1980
- 4 王永昭, C. S. Ih *et al.*, *天津大学学报*, (1), 100 (1986)