

失调正交棱镜腔的分析

吕百达 胡玉芬* 周兴灵 许世发 蔡邦维
(四川大学物理系, 成都)

摘要: 使用传输矩阵方法推导出了稳定正交棱镜腔失调灵敏度参量的公式。本文所得结果在理论上说明了这类棱镜腔具有对失调不灵敏和机械稳定性高的优点。

关键词: 失调灵敏度, 正交棱镜腔, 传输矩阵法

Misalignment sensitivity of a rectangularly crossed prism resonator

Lü Baida, Hu Yufang, Zhou Xingling, Xu Shifa, Cai Bangwei
(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract: Formulae for misalignment sensitivity of a rectangularly crossed prism stable resonator are derived by means of transfer matrix methods. The results obtained in this paper have shown theoretically that the prism resonator has the advantages of insensitivity to prism tilting and high mechanical stability.

Key words: misalignment sensitivity, rectangularly crossed prism resonator, transfer matrix methods

国内外的实验研究工作都证实了交叉棱镜腔具有机械稳定性高、对失调不灵敏的优点^[1~3]。使用这类光腔的电光调Q激光器要求将二棱镜的棱线置于互相垂直的位置^[2]。本文以工作于稳定区的正交棱镜腔为例,分析这类光腔的失调特性,以说明有关的实验结果。

一、正交棱镜腔失调灵敏度参量公式的推导

理论分析和实验研究表明^[4],引入失调灵敏度参量 D_i ($i=1, 2$, 下同)能较为准确地描述稳定腔的失调行为。关于 D 的计算,可以直接从定义出发推导^[4, 5],亦可采用矩阵方法^[6]。我们的研究对象可具体设为图1所示的正交棱镜腔,它由相距 L 的两个正交的球面直角棱镜 P_1, P_2 组成。设二个棱镜的厚度相等均为 d , 折射率为 n , 二个球面半径分别为 R_1, R_2 。对棱镜选择 xyz 坐标系如图所示,使 y 轴沿棱镜

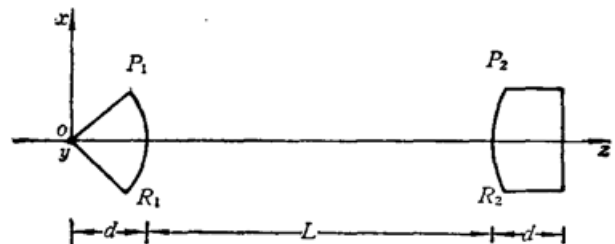


Fig. 1 Schematic diagram of a rectangularly crossed-prism resonator

收稿日期: 1989年3月20日。

* 现工作地址: 成都208厂。

P_1 的棱线方向, 棱镜 P_2 的棱线则在 x 轴方向, z 为光轴。使用传输矩阵方法, 推出在 xoz 、 yoz 面棱镜 P_1 、 P_2 的变换矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} T_{xoz,1} &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R'_1} & -2l_0 \\ \frac{2}{R'_1} \left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R'_1} \end{pmatrix} \\ T_{yoz,1} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R'_1} & 2l_0 \\ -\frac{2}{R'_1} \left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R'_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{xoz,2} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R'_2} & 2l_0 \\ -\frac{2}{R'_2} \left(1 - \frac{l_0}{R'_2}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R'_2} \end{pmatrix} \\ T_{yoz,2} &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R'_2} & -2l_0 \\ \frac{2}{R'_2} \left(1 - \frac{l_0}{R'_2}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R'_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$R'_i = \frac{R_i}{n-1} \quad i=1, 2 \quad (3)$$

$$l_0 = \frac{d}{n} \quad (4)$$

本文用矩阵方法推导 D , 它具有规范化的特点。首先将(1)、(2)式增广, 得到棱镜在 xoz 面(相当于棱镜 P_i 绕 y 轴转 α_{ix} 角)和在 yoz 面(相当于棱镜 P_i 绕 x 轴转 α_{iy} 角)的 4×4 失调矩阵

$$\left. \begin{aligned} M_{xoz,1} &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R'_1} & -2l_0 & 0 & 2l_0\alpha_{1x} \\ \frac{2}{R'_1} \left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R'_1} & 0 & -\frac{2l_0}{R'_1} \alpha_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_{yoz,1} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R'_1} & 2l_0 & 0 & -2l_0\alpha_{1y} \\ -\frac{2}{R'_1} \left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R'_1} & 0 & -2 \left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) \alpha_{1y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_{xoz,2} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R'_2} & 2l_0 & 0 & -2l_0\alpha_{2x} \\ -\frac{2}{R'_2} \left(1 - \frac{l_0}{R'_2}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R'_2} & 0 & -2 \left(1 - \frac{l_0}{R'_2}\right) \alpha_{2x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$M_{yoz,2} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R_2'} & -2l_0 & 0 & 2l_0\alpha_{2y} \\ \frac{2}{R_2'} \left(1 - \frac{l_0}{R_2'}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R_2'} & 0 & -\frac{2l_0}{R_2'} \alpha_{2y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

现在计算当棱镜 P_1 失调时引入的失调灵敏度参量 D_{10} 为此, 先设 P_1 绕 y 轴转动 α_{1x} 角, 由此引起在 P_1 和 P_2 处的线偏移和角偏移分别为 r_{11} 、 θ_{11} 、 r_{21} 、 θ_{21} (为书写简便, 略去了这些量的下标 xoz , 下同), 则有

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R_1'} & -2l_0 & 0 & 2l_0\alpha_{1x} \\ \frac{2}{R_1'} \left(1 - \frac{l_0}{R_1'}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R_1'} & 0 & -\frac{2l_0}{R_1'} \alpha_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R_2'} & 2l_0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{R_2'} \left(1 - \frac{l_0}{R_2'}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R_2'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

在

$$l_0 \ll R_1, R_2, L \quad (8)$$

条件下, 式中以 P_1 为参考光腔的往返一周矩阵元 A 、 B 、 C 、 D 为

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - 2g_2 + \frac{2l_0}{L} (1 + g_1 + g_2 - 2g_1g_2 - g_2^2) \\ B &= -2g_2L + 2l_0(1 - 2g_1g_2 - g_2^2) \\ D &= 1 + 2g_2 - 4g_1g_2 - \frac{2l_0}{L} [(1 - g_1 - g_2)(1 - 2g_1g_2) - g_2^2] \\ C &= \frac{AD - 1}{B} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

失调矩阵元 E 、 F 、 G 、 H 为

$$\left. \begin{aligned} E &= G = 0 \\ F &= 2l_0\alpha_{1x} \\ H &= -\frac{2l_0(1 - g_1)}{L} \alpha_{1x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

光腔 g 参数定义为

$$g_i = 1 - \frac{L}{R'_i} \quad i=1, 2 \quad (11)$$

由(7)、(9)、(10)式,并注意到条件(8),得

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{(1-D)(E+F)+B(G+H)}{2-A-D} \\ &= \frac{l_0 g_1 g_2 \alpha_{1z}}{g_1 g_2 - \frac{l_0}{L}(1-g_1 g_2)(g_1+g_2)} \end{aligned} \quad (12)$$

类似地,由

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{R'_2} & 2l_0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{R'_2}\left(1 - \frac{l_0}{R'_2}\right) & 1 - \frac{2l_0}{R'_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{2l_0}{R'_1} & -2l_0 & 0 & 2l_0 \alpha_{1z} \\ \frac{2}{R'_1}\left(1 - \frac{l_0}{R'_1}\right) & -1 + \frac{2l_0}{R'_1} & 0 & -\frac{2l_0}{R'_1} \alpha_{1z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A' & B' & E' & F' \\ C' & D' & G' & H' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A' &= 1 - 2g_1 + \frac{2l_0}{L}(1 + g_1 + g_2 - 2g_1 g_2 - g_1^2) \\ B' &= -2g_1 L + 2l_0(1 - 2g_1 g_2 - g_1^2) \\ D' &= 1 + 2g_1 - 4g_1 g_2 - \frac{2l_0}{L}[(1 - g_1 - g_2)(1 - 2g_1 g_2) - g_1^2] \\ C' &= \frac{A'D' - 1}{B'} \\ E' &= G' = 0 \\ F' &= 2l_0 g_1 \alpha_{1z} \\ H' &= -\frac{2l_0 \alpha_{1z}}{L}(1 + g_1 - 2g_1 g_2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

得出

$$\begin{aligned} r_{21} &= \frac{(1-D')(E'+F')+B'(G'+H')}{2-A'-D'} \\ &= \frac{l_0 g_1 \alpha_{1z}}{g_1 g_2 - \frac{l_0}{L}(1-g_1 g_2)(g_1+g_2)} \end{aligned} \quad (15)$$

按光腔理论^[4], P_1 、 P_2 处的基模光斑尺寸 W_1 、 W_2 可由(9)、(14)推得为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{W_1^2} &= \frac{\pi}{\lambda|B|} \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2} = \frac{\pi \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 + \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(2g_1g_2-1) \right]}}{\lambda |g_2L - l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)|} \\ \frac{1}{W_2^2} &= \frac{\pi}{\lambda|B'|} \sqrt{1 - \left(\frac{A'+D'}{2}\right)^2} = \frac{\pi \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 + \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(2g_1g_2-1) \right]}}{\lambda |g_1L - l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)|} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16)式成立条件是

$$\left| \frac{A+D}{2} \right| < 1 \quad (17)$$

(注意光腔基本关系式 $A+D=A'+D'$), 即约束稳定腔, 式中 λ 为激光波长。

将(12)、(15)、(16)式代入失调灵敏度参量的定义式^{[4][5]}

$$D_{\text{soz},1}^2 = \frac{1}{\alpha_{1x}^2} \left[\left(\frac{r_{11}}{W_1} \right)^2 + \left(\frac{r_{21}}{W_2} \right)^2 \right] \quad (18)$$

之中, 经计算整理得到

$$D_{\text{soz},1}^2 = \frac{\pi g_1 l_0^2 \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 - \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(1-2g_1g_2) \right]}}{\lambda g_2 \left[g_1g_2 - \frac{2l_0}{L} (g_1+g_2)(1-g_1g_2) \right]} \left\{ \frac{g_2^2}{|g_2L - l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)|} + \frac{1}{|g_1L - l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)|} \right\} \quad (19)$$

再设棱镜 P_1 绕 x 轴失调 α_{1y} 角, 类似于(19)式的计算步骤求出

$$D_{y\text{oz},1}^2 = \frac{\pi L \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 - \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(1-2g_1g_2) \right]}}{\lambda g_1 \left[g_1g_2 - \frac{2l_0}{L} (1-g_1g_2)(g_1+g_2) \right]} \left| \frac{Lg_2 - 2l_0(1-g_1g_2-g_2^2)}{Lg_2 - l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)} \right| \quad (20)$$

于是

$$D_1^2 = D_{\text{soz},1}^2 + D_{y\text{oz},1}^2 \quad (21)$$

同法, 设棱镜 P_2 失调, 绕 y 轴、 x 轴失调角分别为 α_{2x} 、 α_{2y} , 则可推导得

$$D_{\text{soz},2}^2 = \frac{\pi L \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 - \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(1-2g_1g_2) \right]}}{\lambda g_2 \left[g_1g_2 - \frac{2l_0}{L} (1-g_1g_2)(g_1+g_2) \right]} \cdot \left| \frac{Lg_1 - 2l_0(1-g_1g_2-g_1^2)}{Lg_1 - l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)} \right| \quad (22)$$

$$D_{y\text{oz},2}^2 = \frac{\pi g_2 l_0^2 \sqrt{(1-g_1g_2) \left[g_1g_2 - \frac{l_0}{L} (g_1+g_2)(1-2g_1g_2) \right]}}{\lambda g_1 \left[g_1g_2 - \frac{2l_0}{L} (g_1+g_2)(1-g_1g_2) \right]} \left\{ \frac{g_1^2}{|g_1L - l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)|} + \frac{1}{|g_2L - l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)|} \right\} \quad (23)$$

$$D_2^2 = D_{\text{soz},2}^2 + D_{y\text{oz},2}^2 \quad (24)$$

于是棱镜腔的总失调灵敏度参量 D 为

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2 = D_{xoz,1}^2 + D_{yoz,1}^2 + D_{xoz,2}^2 + D_{yoz,2}^2 \quad (25)$$

(19)、(20)、(22)、(23)式在数学形式上较繁,实用中,利用(8)式还可进一步简化。(19)、(23)式中略去 l_0^2 项(用带“'”量表示),则

$$D'_{xoz,1} = D'_{yoz,2} = 0 \quad (26)$$

若 l_0 项亦可略去,(20)、(22)式简化为

$$D'_{yoz,1}{}^2 = \frac{\pi L}{\lambda |g_1|} \sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \quad (27)$$

$$D'_{xoz,2}{}^2 = \frac{\pi L}{\lambda |g_2|} \sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \quad (28)$$

于是

$$D'^2 = \frac{\pi L}{\lambda} \sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \left(\frac{1}{|g_1|} + \frac{1}{|g_2|} \right) \quad (29)$$

$D_{yoz,1}$ 和 $D'_{yoz,1}$ 比较的数值计算例见图 2。图中取 $R_1=1.9$ m, $R_2=1.2$ m, $l_0=6.6$ mm, $L=761.8$ mm, 因此 $\left| \frac{A+D}{2} \right| = 0.09$ 。由图可见,在实验取值范围内 $\frac{D_{yoz,1}}{D'_{yoz,1}} \cong 1$, 即简化公式是可用的。

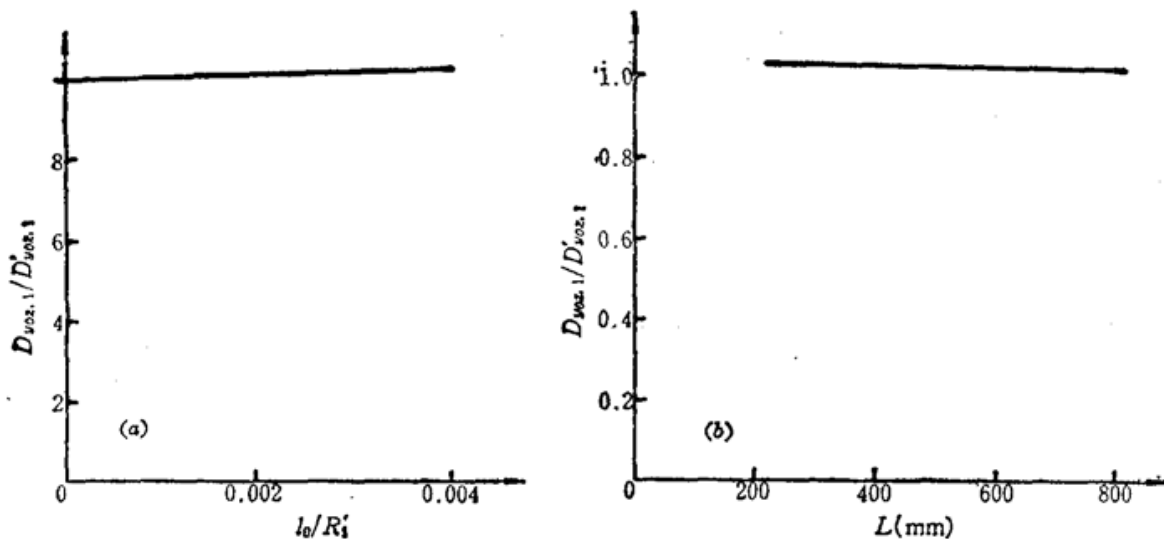


Fig. 2 (a) $D_{yoz,1}/D'_{yoz,1}$ varies with l_0/R'_1 ($R'_1 = \text{const}$); (b) $D_{yoz,1}/D'_{yoz,1}$ varies with L

二、分析和讨论

由以上分析可知:

1. 在(8)式成立条件下,(27)、(28)式说明正交棱镜腔对敏感方向(例如对图 1 中的棱镜 P_1 为绕 x 轴, P_2 为绕 y 轴方向)的失调容限比之平行平面腔大为增加。(26)式则表明,它对绕棱线的失调则是完全不灵敏的。显然,棱镜对绕光轴(z 轴)的转动也是完全不灵敏的。这些结论都与我们的实验结果相符合。正交棱镜腔有较大的失调容限,机械稳定性高。

2. 对由曲率半径为 R'_1 、 R'_2 的两个普通球面反射镜相距 L 构成的稳定腔,失调灵敏度参量为^[4]

$$D_{0i}^2 = \frac{\pi L}{\lambda} \sqrt{\frac{g_j}{g_i}} \frac{1+g_1g_2}{(1-g_1g_2)^{3/2}} \quad i, j=1, 2, i \neq j \quad (30)$$

式中 g 参数为(10)式。

因此

$$\frac{D_i'^2}{D_{0i}^2} = \frac{(1-g_1g_2)^2}{g_1g_2(1+g_1g_2)} \quad (31)$$

由(31)式推知, 当

$$0.33 < g_1g_2 < 1 \quad (32)$$

时, 正交棱镜腔的失调容限大于相同几何参数(R'_1, R'_2, L)的普通稳定球面腔。在稳定腔的设计时, 常取 g_1g_2 在 0.4~0.6 范围, 故(32)式一般是满足的。

3. 本文所得公式成立前提为(1)条件 $l_0 \ll R_1, R_2, L$ 成立, 在实际工作中均是满足; (2) 正交棱镜腔(二棱线交角接近 90° , 且最好取为 π 的无理数倍^[2]); (3) 约束稳定腔, 即(17)式成立。该式亦可用 g 参数写为

$$0 < g_1g_2 - \frac{l_0}{L} (1-g_1g_2)(g_1+g_2) < 1 \quad (33)$$

当 l_0 项可略去时

$$0 < g_1g_2 < 1 \quad (34)$$

实际上, 本文给出了分析含球面棱镜(其变换矩阵用(1)式描写)稳定腔失调特性的一个方法。对二球面棱镜棱线有小交角的情况, 或者由一个球面棱镜与另一个普通球面(或平面)反射镜组成的稳定腔, 都可采用相似的方法分析。

作者对四川省科委的资助和与西德 H. Weber 教授对本文有关问题进行的十分有益讨论深表感谢。

参 考 文 献

- 1 AD. A096538, 1981.
- 2 邓仁亮 *et al.*, 光学学报, 4 (8), 721 (1984)
- 3 吕百达 *et al.*, 待发表。
- 4 H. Weber, 激光谐振腔, 华中工学院出版社, 1983, 157
- 5 吕百达, H. Weber, 中国激光, 12 (9), 513 (1985)
- 6 王绍民, *Opt. & Quant. Electr.*, 17 (1), 1 (1985)