

# 固体激光器的瞬态热分布: 有限几何尺寸三维模型

吕百达 廖 严 蔡邦维

(四川大学物理系, 610064)

**摘要:** 本文建立了有限几何尺寸棒状激光介质瞬态热分布的三维模型。在普遍情况下推导出温度分布的解析公式。对棒状和 slab 介质作了对比。使用计算机作了数值计算进一步说明了我们的理论结果。

**关键词:** 瞬态热分布, 有限几何尺寸

## Transient thermal profile in solid-state laser: a finite-geometry three-dimensional model

*Lü Baida, Liao Yan, Cai Bangwei*

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu)

**Abstract:** A three-dimensional model for transient thermal profile in a finite laser rod is presented. Closed-form temperature expressions are derived in general case. A comparison between the rod-and slab-geometry media is given and computerized calculations are performed to explain our theoretical results.

**Key words:** transient thermal profile, finite-geometry three-dimensional model

迄今, 对固体激光器光泵浦热效应的理论研究均采用一维无限长几何模型。对棒状固体激光器, 使用这一模型可研究在稳态、非稳态、单脉冲和重复频率泵浦下, 激光介质内的一维温度场分布、热致应力双折射、光弹性应力和热透镜效应等问题<sup>[1,2]</sup>。对于 slab 几何结构固体激光器, 一级热效应被锯齿形光路和 slab 几何结构的对称性所消除<sup>[3,4]</sup>, 实验中观察到的边缘效应、端面效应不能用一维无限宽、无限长模型给出解释, 为此有必要建立有限几何尺寸的三维模型, 研究在边缘和端面上的瞬态热分布<sup>[5]</sup>。实际上, 因激光介质几何长度总为有限值而引起在端面处的温度跃变对棒状激光器也是存在的。为了全面认识固体激光器中的瞬态热分布, 有必要在较为普遍的情况下来研究这一问题。本文从求解三维热传导方程出发, 推导出有限几何尺寸棒状激光介质的温度分布公式, 讨论了泵浦参数、不同激光介质对温度分布的影响和简化为二维解、一维解的条件, 并与 slab 介质的温度分布作了对比, 还作了数值计算来说明解的物理意义。文中所得结果对各种情况下(单脉冲、重复频率、连续)工作的固体激光器的设

计有参考价值。

### 一、三维瞬态热分布模型

对长为  $L$ 、半径  $R$  的棒状激光介质, 取柱坐标  $z$  轴沿长度方向,  $r$  为径向, 则三维热传导方程和边界条件初始条件可写为<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} \Delta_3 T + \frac{h}{\kappa} = \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\frac{\lambda R}{\kappa} (T - T_0) \Big|_{r=1} & (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1) \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm 1} = \mp \frac{\lambda L}{2\kappa} (T - T_c) \Big|_{z=\pm 1} \\ T - T_0 \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $T(r, \theta, z)$  为温度分布函数,  $T_0$  为冷却剂的温度, 且径向坐标  $r$  已用  $R$ , 轴向坐标  $z$  已用  $L/2$  作了归一化处理。而

$$h = \frac{\eta P(t)}{V} f(r, \theta, z) \quad (2)$$

为单位时间、单位体积的热注入;  $\eta$  为热效率;  $P(t)$  为泵浦功率函数;  $V$  为体积;  $f(r, \theta, z)$  为与泵浦光空间分布有关的配分函数。另外,

$$m = \frac{\kappa}{\rho C} \quad (3)$$

为热扩散率;  $\kappa$  为热导率;  $\rho$  为密度;  $C$  为比热,  $\lambda$  为热传导系数, 式中已设沿  $r, z$  方向的  $\lambda$  相同。

(1) 式在数学上是能严格求解的。使用分离变数和参数变易法<sup>[2]</sup>, 得到(1)式的解为

$$T - T_0 = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{n=0, k=1}^{\infty} B_{n,i,k}^{i,j} \Phi_{in}(\theta) Z_{jl}(z) J_n(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_{i,k}^j) \quad (4)$$

式中

$$\Phi_{in}(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta & i=1 \\ \sin n\theta & i=2 \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$Z_{jl}(z) = \begin{cases} \cos \delta_{1l} z & j=1 & \text{tg } \delta_{1l} = \frac{\lambda L}{2\kappa \delta_{1l}} \\ \sin \delta_{2l} z & j=2 & \text{ctg } \delta_{2l} = -\frac{\lambda L}{2\kappa \delta_{2l}} \end{cases} \quad l=1, 2, \dots \quad (6)$$

$J_n(\alpha_k r)$  为  $n$  阶 Bessel 函数,  $\alpha_k$  由方程

$$\alpha_k J_{n-1}(\alpha_k) = \left( n - \frac{\lambda R}{\kappa} \right) J_n(\alpha_k) \quad (7)$$

决定, 系数  $B_{n,i,k}^{i,j}$  为

$$B_{n,i,k}^{i,j} = \frac{\eta}{V \rho C} O_{n,i,k}^{i,j} \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_{i,k}^j) dt' \quad (8)$$

而

$$O_{n,l,k}^i = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^1 f(r, \theta, z) \Phi_{in}(\theta) Z_{jl}(z) J_n(\alpha_k r) r dr}{\pi \int_{-1}^1 Z_{jl}^2(z) dz \int_0^1 J_n^2(\alpha_k r) r dr} \quad n \geq 1$$

$$O_{0,l,k}^i = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^1 f(r, \theta, z) Z_{jl}(z) J_0(\alpha_k r) r dr}{2\pi \int_{-1}^1 Z_{jl}^2(z) dz \int_0^1 J_0^2(\alpha_k r) r dr}$$

$$O_{0,l,k}^2 = 0 \quad n = 0 \quad (9)$$

$$1/\tau_{l,k}^i = m \left[ \left( \frac{\alpha_k}{R} \right)^2 + \left( \frac{2\delta_{jl}}{L} \right)^2 \right] \quad (10)$$

从(4)式以及(5)~(10)式得出的有限几何尺寸棒状激光介质三维瞬态热分布的结果是最一般的。泵浦参数、不同激光材料对  $T(r, \theta, z)$  的影响由热注入函数  $h(r, \theta, z, t)$  (其空间分布由配分函数  $f(r, \theta, z)$  表征, 时间分布由泵浦功率函数  $P(t)$  表征)、材料的热学、力学常数  $\kappa, \lambda, \rho, C$  和几何参数  $R, L$  等反映出来。由于  $T$  是  $r, \theta, z$  和  $t$  的函数, 所以棒状介质在中心和边缘以及端面处的温度一般情况下是不相同的, 且随时间变化。虽然(4)式在形式上较为复杂, 但用计算机求数值解并无原则性的困难。而且, 对实际的物理问题, (4)式常可简化。例如, 当泵浦光具有角向对称性(与  $\theta$  无关)时, (9)式中非零项仅为

$$O_{0,l,k}^1 = \frac{2 \int_{-1}^1 dz \int_0^1 f(r, z) Z_{jl}(z) J_0(\alpha_k r) r dr}{[J_1^2(\alpha_k) + J_0^2(\alpha_k)] \int_{-1}^1 Z_{jl}^2(z) dz} \quad (11)$$

其解化为二维( $r, z$ )形式:

$$T - T_c = \sum_{j=1}^2 \sum_{l, k=1}^{\infty} B_{0,l,k}^1 Z_{jl}(z) J_0(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_{l,k}^1) \quad (12)$$

式中系数

$$B_{0,l,k}^1 = \frac{\eta}{V\rho C} O_{0,l,k}^1 \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_{l,k}^1) dt' \quad (13)$$

对理想均匀泵浦,  $f(r, z) = 1$ , (12)式还可进一步简化为

$$T - T_c = \frac{\eta}{V\rho C} \sum_{l, k=1}^{\infty} O_{0,l,k}^1 \left( \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_{l,k}^1) dt' \right) \cdot \cos \delta_{1l} z J_0(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_{l,k}^1) \quad (14)$$

式中

$$O_{0,l,k}^1 = \frac{2\lambda L J_1(\alpha_k)}{\alpha_k \kappa [J_0^2(\alpha_k) + J_1^2(\alpha_k)] \left[ \left( 1 + \frac{\lambda L}{2\kappa} \right) \frac{\lambda L}{2\kappa} + \delta_{1l}^2 \right] \cos \delta_{1l}} \quad (15)$$

又如, 在无限长  $L \rightarrow \infty$  条件下, (4)式化为二维( $r, \theta$ )解

$$T - T_c = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{n,k}^i \Phi_{in}(\theta) J_n(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_k) \quad (16)$$

式中

$$B_{n,k}^i = \frac{\eta}{V\rho C} O_{n,k}^i \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_k) dt' \quad (17)$$

$$O_{n,k}^i = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r, \theta) \Phi_{in}(\theta) J_n(\alpha_k r) r dr}{\pi \int_0^1 J_n^2(\alpha_k r) r dr} \quad n \geq 1$$

$$O_{0,k}^1 = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r, \theta) \Phi_{in}(\theta) J_0(\alpha_k r) r dr}{\pi [J_0^2(\alpha_k) + J_1^2(\alpha_k)]}$$

$$O_{0,k}^2 = 0 \quad n = 0$$

(18)

$$1/\tau_k = m\alpha_k^2/R^2 \quad (19)$$

进一步,若设泵浦与  $\theta$  无关, (16)~(19)式就简化为通常的一维解<sup>[2]</sup>:

$$T - T_c = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_k) \quad (20)$$

$$B_k = \frac{n}{V\rho C} O_k \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_k) dt' \quad (21)$$

$$O_k = \frac{2}{J_0^2(\alpha_k) + J_1^2(\alpha_k)} \int_0^1 f(r) J_0(\alpha_k r) r dr \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_k} = m\alpha_k^2/R^2 \quad (23)$$

当  $h=0$ , 即假定泵浦时间与介质内热弛豫时间相比较很短, 泵浦过程可不考虑, 将泵浦作用视为在介质上形成一个初始热分布, 于是在(1)式中令  $h=0$ , 并将初始条件用

$$T - T_c|_{t=0} = \Delta T \varphi(r, \theta, z) \quad (24)$$

来代替, 容易证明, 这时三维热传导方程的一般解为

$$T - T_c = \Delta T \sum_{l,j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,l,k}^{i,j} \Phi_{in}(\theta) Z_{jl}(z) J_n(\alpha_k r) \exp(-t/\tau_{l,k}^i) \quad (25)$$

(25)式中系数  $A_{n,l,k}^{i,j}$  可由(9)式  $O_{n,l,k}^{i,j}$  的公式中作  $f(r, \theta, z) \rightarrow \varphi(r, \theta, z)$  代换得出。显然, 文献中常用的一维连续稳态解亦易作为(4)的特例得出。

泵浦脉冲功率函数  $P(t)$  对热分布的影响由(8)式表征。该式对单脉冲泵浦情况使用较为方便, 对重复频率泵浦, 设泵浦脉冲总数为  $M$ , 脉冲周期为  $t_p$ , 将每个泵浦脉冲对热分布的贡献相加, 则可推出一个对各种泵浦脉冲形状都普适的公式:

$$B_{n,l,k}^{i,j} = \frac{n}{V\rho C} O_{n,l,k}^{i,j} \left\{ \int_0^t P(t') \exp(t'/\tau_{l,k}^i) dt' + \frac{1 - [\exp - (M-1)t_p/\tau_{n,l,k}^i]}{\exp(t_p/\tau_{n,l,k}^i) - 1} \int_0^{t_p} P(t') \exp(t'/\tau_{l,k}^i) dt' \right\}$$

$$t \in [0, t_p] \quad (26)$$

由(8)、(26)式知,  $P(t)$  只对系数  $B_{n,l,k}^{i,j}$  有影响, 并注意, 我们在推导(26)式时, 时间  $t$  的计算起点已平移到第  $M$  个泵浦脉冲的始点。对文献中常用的矩形、抛物线形泵浦脉冲, 或根据实验结果写出的泵光的模拟式, 都不难利用(26)式写出具体计算公式。对实验中常用的钕玻璃、YAG 激光器, 计算表明, 不同形状的泵浦脉冲对瞬态热分布的影响主要在泵浦的加热过程中表现出来, 对于泵浦之后的冷却过程(与泵浦时间相比, 冷却时间通常很长)中的瞬态热分布, 这一影响可略而不计。

## 二、数值计算

以磷酸盐钕玻璃为例, 利用本文推出的公式对棒状介质的温度分布作了数值计算, 并与 slab 介质的数值计算结果(对 slab 有关计算公式请参考[5])作了对比, 现举例说明如下。计算中所取参数为  $\kappa=0.0067 \text{ W/cm}\cdot\text{k}$ ,  $\lambda=0.8 \text{ W/cm}^2\cdot\text{k}$ ,  $\rho=2.60 \text{ g/cm}^3$ ,  $C=0.568 \text{ J/g}\cdot\text{k}$ ,  $m=0.00454 \text{ cm}^2/\text{s}$ 。为了便于比较, 计算中时间常数  $\tau$  统一取为  $\tau=b^2/4m$ ,  $b=5 \text{ mm}$ 。图 1(a)、(b)为单脉冲, (c)、(d)为重复频率脉冲( $M\rightarrow\infty$ )泵浦下, 棒状钕玻璃介质温度分布随坐标  $z$  的变化, 在图 1(a)、(c)中  $f(r, \theta, z)=1$ , 图 1(b)、(d)中  $f(r, \theta, z)=1+0.4z^2$ ,  $R=4.9 \text{ mm}$ ,  $L=150 \text{ mm}$ , 参数为  $t/\tau$ , 每个泵浦脉冲能量为  $E$ 。由图 1 知, 对有限几何长度的棒状介质, 无论在单脉冲或重复频率脉冲泵浦下, 即使对于理想均匀泵浦情况在端面处都会有温度陡变出现, 而非均匀泵浦 ( $f(r, \theta, z)=1+0.4z^2$ ) 更会加剧这一效应。上述变化情况与 slab 介质相似<sup>[5]</sup>。端面温度陡变会导致介质端面的形变, 由此引起热应力, 这在实验中是应当力求减小的。

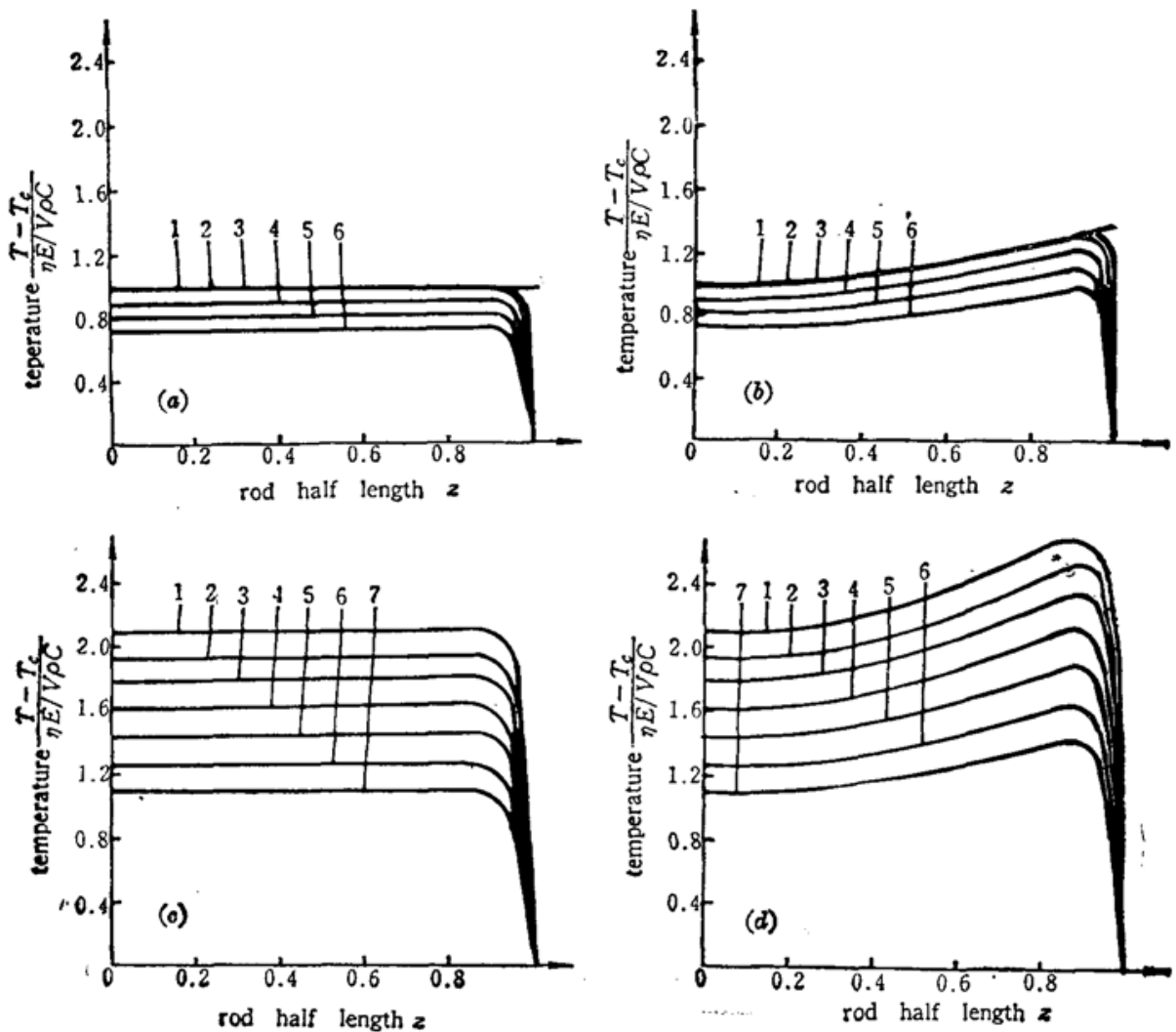


Fig. 1 Temperature distribution of a Nd: phosphate glass rod for single-shot (a), (b) and repetitively pumped ( $M\rightarrow\infty$ ) (c, d) operations as a function of coordinate  $z$ . (a), (c)  $f(r, \theta, z)=1$ , (b), (d)  $f(r, \theta, z)=1+0.4z^2$ , parameter is  $t/\tau$ : 1- $t/\tau=10^{-4}$ ; 2- $t/\tau=0.1$ ; 3- $t/\tau=0.2$ ; 4- $t/\tau=0.3$ ; 5- $t/\tau=0.4$ ; 6- $t/\tau=0.5$ ; 7- $t/\tau=0.6$

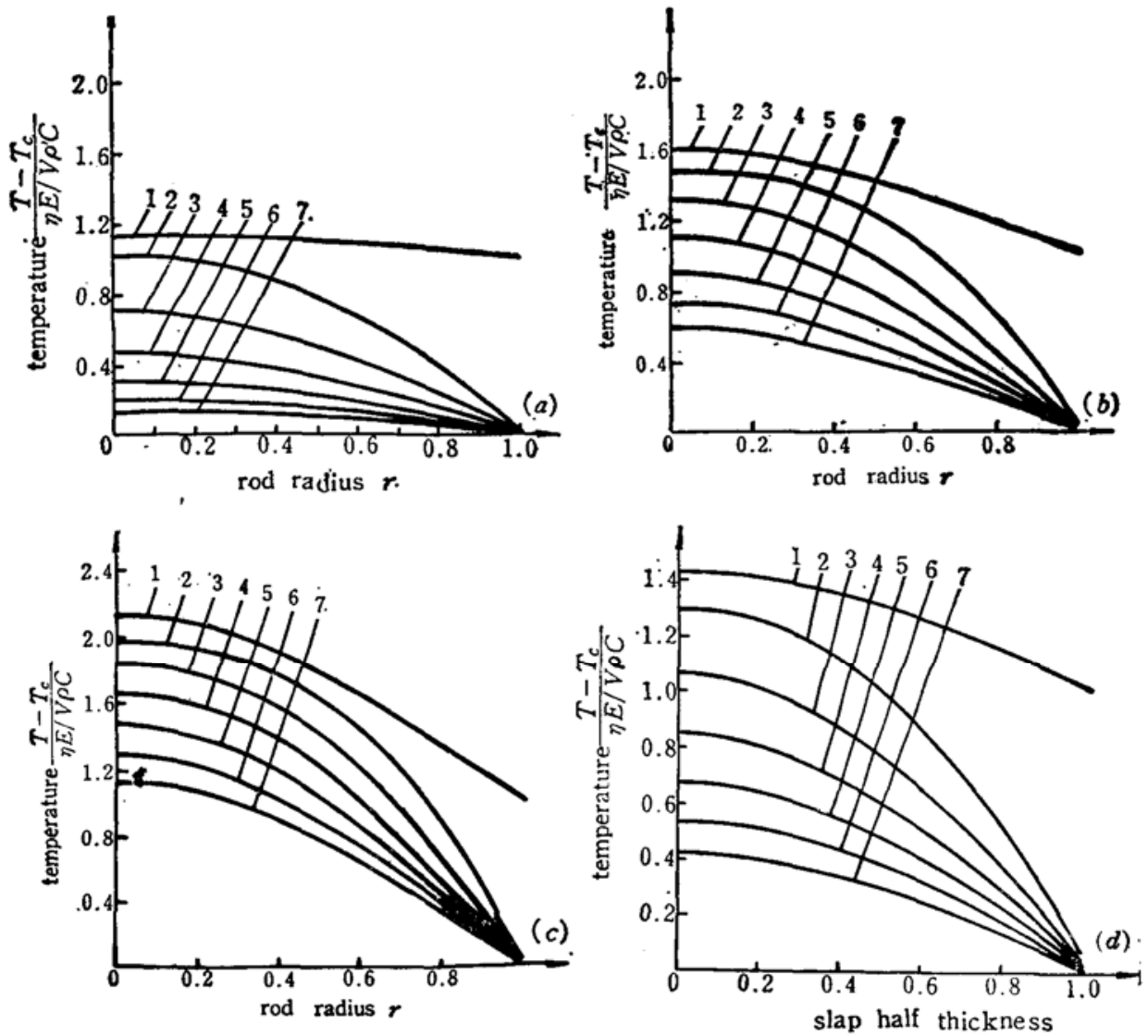


Fig. 2 Temperature profile in  $r$ -direction of a Nd:glass rod (a), (b), (c) and in  $y$ -direction of a Nd: glass slab (e) for repetitively pumped ( $M \rightarrow \infty$ ) operation.

$L \rightarrow \infty, f=1, \pi R^2=ab$ , (a)  $R=b/\sqrt{\pi}$ ,  $a/b=1$ ; (b)  $R=\sqrt{\frac{2}{\pi}}b$ ,  $a/b=2$ ; (c)  $R=\sqrt{\frac{3}{\pi}}b$ ,  $a/b=3$

图 2 为在重复频率脉冲 ( $M \rightarrow \infty$ ) 泵浦下 (a)、(b)、(c)、(d) 棒状介质沿径向和 (d) slab 介质沿厚度方向的温度剖面,  $L \rightarrow \infty, f=1$ 。为作比较计算中取二种介质截面积相等  $\pi R^2=ab$ ,  $b=5 \text{ mm}$ 。由图可见, 只要  $a/b \geq 2$ , 在泵浦条件相同情况下, 同样材料、相同截面积上棒的温度剖面就比 slab 的陡得多, 因此在设计 slab 激光器时, 其宽厚比不小于 2 为宜<sup>[3]</sup>。棒与 slab 激光介质瞬态温度分布的差异在中心温度随时间的变化上也反映出来。图 3 描述在重复频率脉冲泵浦并保持平均泵浦功率  $P$  不变条件下 (a) 棒; (b) slab 中心温度分布的建立过程,  $f=1$ ,  $L \rightarrow \infty$  参数为泵浦频率,  $R=\sqrt{\frac{3}{\pi}}b$ ,  $a/b=3$ 。显然, 在上述条件下, 当趋于稳态热分布时, 棒的温度比 Slab 要高。

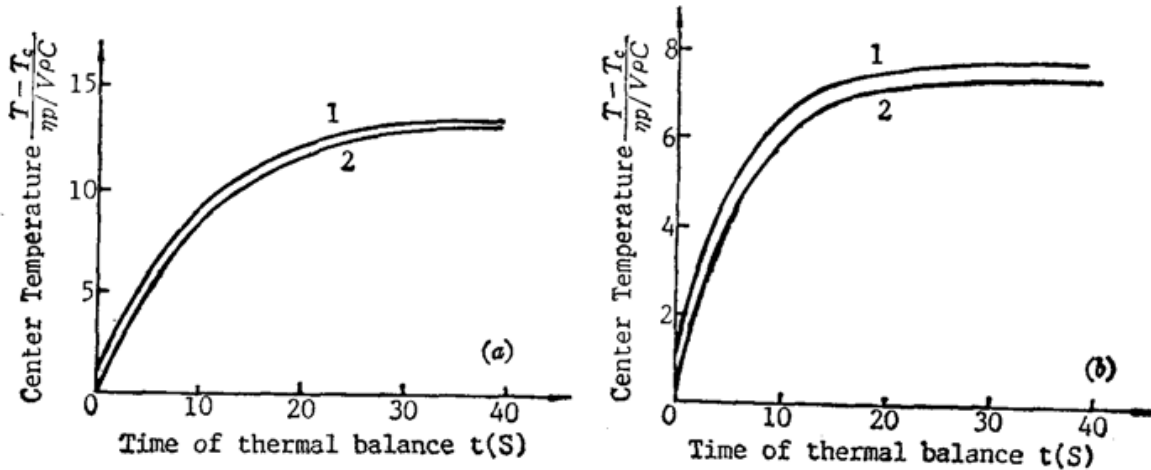


Fig. 3 Temperature buildup at the center of a repetitively pumped (a) rod, (b) slab vs time  $t$ , keeping the average pumping power constant.  $f=1$ ,  $L \rightarrow \infty$ ,  $\sigma R^2 = ab$ ,  $a/b=3$ , parameter is the pumping frequency  $\nu$ , 1- $\nu=1$  Hz, 2- $\nu=5 \sim 20$  Hz.

### 三、小 结

1. 本文在普遍情况下建立了有限几何尺寸固体激光介质的三维瞬态热分布模型,并证明文献中广为使用的一维解和有关结果可由本文公式简单得出。理论分析和实验都指出,只要激光介质在长度方向是有限的,即使在均匀泵浦和均匀冷却的物理条件下,端面温度跃变也会出现,这是直接引起端面形变和热应力的原因。一维无限长模型对此是不能给出满意解释的。

2. 使用本文公式所作数值计算定量地反映出棒状和 slab 激光介质温度剖面的差异,并可为固体激光器的设计提供一些有用的计算数据和曲线。

3. 本文所用方法可推广用于分析 slab<sup>[5]</sup>、圆筒状激光介质的三维热分布,并可针对实验中使用不同固体激光介质的热学、力学和几何参数,研究在各种泵浦条件下介质内的温度分布以及过渡到连续泵浦稳态热分布的条件。

本文作者之一(吕百达)就四川省科委对本课题的资助和与德国柏林固体激光研究所所长 H. Weber 教授所作有益讨论谨表谢忱。

### 参 考 文 献

- 1 W. Koechner, Solid-state Laser Engineering, Springer-Verlag, 1976, 344
- 2 吕百达, H. Weber, 量子电子学, 2(3), 236 (1985)
- 3 J. M. Eggleston et al., IEEE J. Quant. Electr., QE-20(3), 289 (1984)
- 4 T. J. Kane et al., IEEE J. Quant. Electr., QE-21(8), 1195 (1985)
- 5 B. Lü et al., Theoretical Study of Thermal Profile in a Finite Laser Slab, Laser 89, Opto-Elektronik, München, 1989 (第九届国际光-电子学会议报告)
- 6 H. S. Carslaw, J. O. Jaeger, Conduction of Heat in Solid, Oxford University, 1948, 10