

通 信

## 共焦法布里-珀罗扫描干涉仪反射镜 曲率半径误差的约束条件

张 铁 军

(中国科学院长春光机所, 130022)

### Restraint conditions for curvature radius error of reflective mirrors in a confocal Fabry-Perot scanning interferometer

Zhang Tiejun

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Changchun)

**Abstract:** Starting from the principle of equivalent confocal cavity, the paper discusses the restraint conditions for the curvature radius error  $\Delta R$  of reflective mirrors in a confocal Fabry-Perot scanning interferometer. The analytical results show that the limit to  $\Delta R$  is very strict and  $\Delta R$  can be properly compensated by off-focus amount  $\varepsilon$ .

**Key words:** confocal Fabry-Perot scanning interferometer, reflective mirror, radius error

共焦球面镜法布里-珀罗扫描干涉仪(以下称为FPS)是由曲率半径均为  $R$ , 且间距  $L=R$  的两块球面反射镜组成, 它具有很高的光谱分辨本领和聚光本领。文献[1]详尽地讨论了FPS的设计与制作; 文献[2]把反射镜球面加工误差归结为反射镜曲率半径的误差  $\Delta R$ , 并讨论了  $\Delta R$  对分辨本领的影响。但文献[2]对  $\Delta R$  的讨论不明确, 给出的结果也粗糙。本文依照等价共焦腔的方法<sup>[3]</sup>, 参照文献[1]给出的结论, 对这一问题予以详细讨论。

### 一、讨论 $\Delta R$ 的基本出发点

图1给出了一般稳定球面腔的结构原理图。 $R_1$  和  $R_2$  分别为球面反射镜  $M_1$  和  $M_2$  的曲率半径,  $L$  为它们之间的间距。

当  $R_1=R_2=R$  时, 给出FPS结构, 在近轴条件下, 光程差  $\Delta$  满足<sup>[1]</sup>:

$$\Delta = 4(R + \varepsilon) - \frac{\rho^4}{R^3} - 4\varepsilon \frac{\rho^2}{R^2} \quad (1)$$

其中  $\rho$  为入射光线在FPS的中心平面附近与光轴的垂直距离, 且  $\rho \ll R$ ,  $\varepsilon = L - R$  为离焦量。

当  $R_1 \neq R_2$  时, 对光程差  $\Delta$  的表达式(1)应重新认识。由稳定腔的等价共焦腔方法可知,

对于两个镜子组成的稳定谐振腔,当腔中的光场集中于轴线附近时,任何一个稳定的球面腔都

唯一地等价于一个共焦腔,所谓的等价是指它们具有相同的自再现模。因此,只要  $R_1, R_2$  满足如下的稳定性条件:

$$0 < (1 - L/R_1)(1 - L/R_2) < 1 \quad (2)$$

那么就可以找到一个等价共焦腔与由  $R_1$  和  $R_2$  组成的稳定腔具有相同的模式。等价共焦腔的间距  $R_0$  (亦即等价共焦腔的反射镜曲率半径) 满足

$$R_0 = \left[ \frac{4L(L-R_1)(L-R_2)(R_1+R_2-L)}{(2L-R_1-R_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Fig. 1 Principle of structure of a stable spherical cavity

由此,我们认为,在讨论  $R_1 \neq R_2$  情形的 FPS 时(当然  $R_1 \approx R_2$ ), (1) 式中的  $R$  应该是(3)式中由等价共焦腔方法确定的  $R_0$ , 因而对  $\Delta R$  问题的讨论就归结为由  $R_1, R_2$  和  $L$  确定等价共焦腔,进而讨论离焦量,从而进一步讨论  $\Delta R$ 。

## 二、等效离焦量 $\varepsilon_e$

引入两个量  $\varepsilon_1 = L - R_1$ ,  $\varepsilon_2 = L - R_2$ , 定义等效离焦量  $\varepsilon_e = L - R_0$ , 这里  $R_0$  由(3)式给出。则(3)式变为

$$R_0 = \left[ \frac{4L\varepsilon_1\varepsilon_2(L-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

等效离焦量  $\varepsilon_e$  为

$$\varepsilon_e = L - R_0 = L - \left[ \frac{4L\varepsilon_1\varepsilon_2(L-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

对于实际情形,  $\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^2 \ll 1$ ,  $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{L} \ll 1$ , 对(5)式作级数展开并取一级近似有

$$\varepsilon_e \approx \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_1+\varepsilon_2) + L \left( \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \right)^2 \right] \quad (6)$$

文献[2]中认为  $\varepsilon_e \approx \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ , 显然是不全面的。 $\varepsilon_e$  不仅与  $\varepsilon_1+\varepsilon_2$  有关,而且还与  $\varepsilon_1-\varepsilon_2$  有关(即与  $\Delta R = R_2 - R_1$  的二次项有关)。尽管  $\varepsilon_1-\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1+\varepsilon_2$ , 但是因  $L$  很大,故一般情形下不能忽略  $\frac{L}{2} \left( \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \right)^2$ 。数值计算结果见图 2, 结果表明,当  $R_1 \neq R_2$  时忽略  $\frac{L}{2} \left( \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \right)^2$  项是不合适的。另外  $\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$  与  $\frac{L}{2} \left( \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \right)^2$  总是反号的,这对  $\Delta R$  进行补偿是有益的。

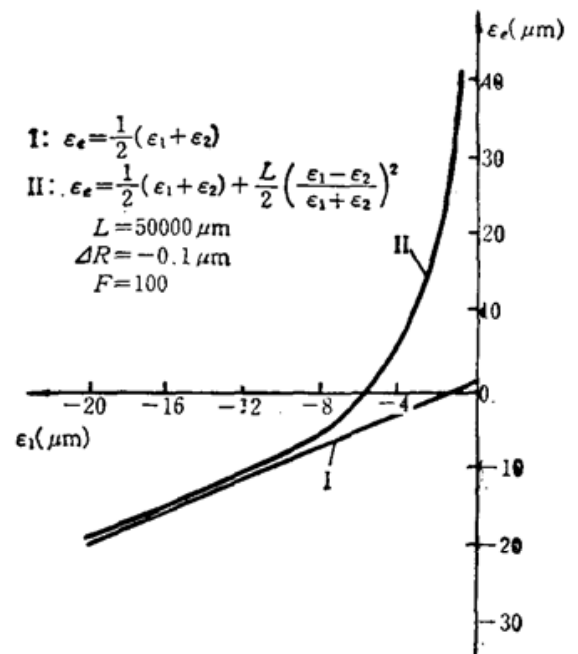


Fig. 2 Numerical comparison results of equivalent off-focus amount

### 三、 $\Delta R$ 的约束条件

引入  $R_0$  后, 对于离焦量  $\varepsilon_e$  的讨论同文献[1]相类似。

#### 3.1 孔径 $\rho$ 对 $\varepsilon_e$ 的影响

将  $R_0, \varepsilon_e$  代入后, (1)式变为

$$\Delta = 4(R_0 + \varepsilon_e) - \frac{\rho^4}{R_0^3} - 4\varepsilon_e \frac{\rho^2}{R_0^2} \quad (7)$$

横向光程差<sup>[1]</sup>  $\delta(\rho)$ 为

$$\delta(\rho) = -\frac{\rho^4}{R_0^3} - 4\varepsilon_e \frac{\rho^2}{R_0^2} \quad (8)$$

综合分辨本领和聚光本领两方面的考虑, 应该使同样大的孔径内横向光程差  $\delta(\rho)$  最小, 为此

取  $\frac{d\delta(\rho)}{d\rho} = 0$ , 则有

$$\rho = \sqrt{-2\varepsilon_e R_0} \quad (9)$$

显然应该有  $\varepsilon_e < 0$ 。此外,  $\delta(\rho)$  还必须满足精细常数的要求, 即有

$$|\delta(\rho)| \leq \frac{\lambda}{F} \quad (10)$$

其中  $\lambda$  为入射激光波长,  $F$  为干涉仪的精细常数。

由(9)、(10)两式可以确定

$$\varepsilon_e < 0, \text{ 且 } |\varepsilon_e| \leq \sqrt{\frac{\lambda R_0}{4F}} \quad (11)$$

利用  $\varepsilon_e = L - R_0$  可将(11)式变为

$$L < R_0 \leq L + \frac{\lambda}{8F} + \sqrt{\frac{\lambda L}{4F} + \left(\frac{\lambda}{8F}\right)^2} \quad (12)$$

注意到  $\Delta R = R_2 - R_1$ , 那么由(12)和(4)式可得下面的不等式必须同时成立:

$$\begin{cases} (R_{\min}^2 + 4L\varepsilon_1)\Delta R^2 + 4\varepsilon_1[L(L - 3\varepsilon_1) - R_{\min}^2]\Delta R + 4\varepsilon_1^2[R_{\min}^2 - L(L - 2\varepsilon_1)] < 0 \\ (R_{\max}^2 + 4L\varepsilon_1)\Delta R^2 + 4\varepsilon_1[L(L - 3\varepsilon_1) - R_{\max}^2]\Delta R + 4\varepsilon_1^2[R_{\max}^2 - L(L - 2\varepsilon_1)] \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

解得

$$\begin{cases} \varphi_1 < \Delta R < \varphi_2 & (L - R_{\max} \leq \varepsilon_1 < L - R_{\min}) \\ \varphi_1 < \Delta R < \varphi'_1 \text{ 或 } \varphi'_2 < \Delta R < \varphi_2 & (\varepsilon_1 < L - R_{\max}) \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$R_{\min} = L \quad (14-1)$$

$$R_{\max} = L + \frac{\lambda}{8F} + \sqrt{\frac{\lambda L}{4F} + \left(\frac{\lambda}{8F}\right)^2} \quad (14-2)$$

$$\varphi_1 = (-2\varepsilon_1) \left[ \frac{L^2 - R_{\min}^2 - 3L\varepsilon_1 - L\sqrt{(L + R_{\min} - \varepsilon_1)(L - R_{\min} - \varepsilon_1)}}{R_{\min}^2 + 4L\varepsilon_1} \right] \quad (14-3)$$

$$\varphi_2 = (-2\varepsilon_1) \left[ \frac{L^2 - R_{\min}^2 - 3L\varepsilon_1 + L\sqrt{(L + R_{\min} - \varepsilon_1)(L - R_{\min} - \varepsilon_1)}}{R_{\min}^2 + 4L\varepsilon_1} \right] \quad (14-4)$$

$$\varphi'_1 = (-2\varepsilon_1) \left[ \frac{L^2 - R_{\max}^2 - 3L\varepsilon_1 - L\sqrt{(L+R_{\max}-\varepsilon_1)(L-R_{\max}-\varepsilon_1)}}{R_{\max}^2 + 4L\varepsilon_1} \right] \quad (14-5)$$

$$\varphi'_2 = (-2\varepsilon_1) \left[ \frac{L^2 - R_{\max}^2 - 3L\varepsilon_1 + L\sqrt{(L+R_{\max}-\varepsilon_1)(L-R_{\max}-\varepsilon_1)}}{R_{\max}^2 + 4L\varepsilon_1} \right] \quad (14-6)$$

对实际情形  $L \gg \varepsilon_1$ ,  $R_{\min} \simeq L$ ,  $R_{\max} \simeq L$ , 则有

$$\varphi_1 \simeq -\varphi_2 = 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{-2\varepsilon_1}{L}} \quad (14-7)$$

$$\varphi'_1 \simeq -\varphi'_2 = 2\varepsilon_1 \sqrt{-2\left(\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}} + \varepsilon_1\right)/L} \quad (14-8)$$

于是(14)式可近似地表示为

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{-2\varepsilon_1}{L}} < \Delta R < (-2\varepsilon_1) \sqrt{\frac{-2\varepsilon_1}{L}}, & \left(-\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}} \leq \varepsilon_1 < 0\right) \\ 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{-2\varepsilon_1}{L}} < \Delta R \leq 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{-2\left(\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}} + \varepsilon_1\right)}{L}} \\ \text{或 } (-2\varepsilon_1) \sqrt{\frac{-2\left(\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}} + \varepsilon_1\right)}{L}} \leq \Delta R < (-2\varepsilon_1) \sqrt{\frac{-2\varepsilon_1}{L}}, & \left(\varepsilon_1 < -\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}}\right) \end{cases} \quad (15)$$

### 3.2. 等效离焦量 $\varepsilon_0$ 对精细常数的影响

由谐振腔理论, 对于一般的稳定球面腔干涉仪, 与其本征模  $\text{TEM}_{mnq}$  相应的共振频率  $\nu_{mnq}$  为

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[ q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \cos^{-1} \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \right] \quad (16)$$

式中  $m, n$  分别为相互垂直的两个方向上的横模序数,  $q$  为纵模序数, 代入  $\varepsilon_1 = L - R_1$  和  $\varepsilon_2 = L - R_2$  有

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[ q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \cos^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{R_1 R_2}} \right] \quad (17)$$

由此可见, 当一单色光入射到干涉仪内时, 入射光场将分解为大量横模, 当干涉仪扫描时, 则它的每个横模在不同的镜间距引起共振而透过干涉仪, 给出多个尖峰的输出, 即模不简并。它造成了干涉仪精细常数的降低, 降低了仪器的分辨本领。为了消除模不简并现象, 满足精细常数的要求, 应对离焦量加以限制。

因  $\varepsilon_1 \ll R_1$ ,  $\varepsilon_2 \ll R_2$ , 由(17)式作级数展开, 取一级近似有

$$\nu_{mnq} \simeq \frac{c}{2L} \left[ 2q + (m+n+1) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{R_1 R_2}} (m+n+1) \right] \quad (18)$$

在满足精细常数  $F$  的要求条件下, 应该有

$$\frac{2}{\pi} (m+n+1) \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{R_1 R_2}} \leq \frac{1}{F} \quad (19)$$

利用前面已推出的结论, 解(19)式可得

$$\Delta R \leq \varphi_3 \quad (\varepsilon_1 < 0) \quad (20)$$

其中:

$$\varphi_3 = \varepsilon_1 - \frac{\pi^2 R_1 R_2}{4F^2 \varepsilon_1 (m+n+1)^2} \simeq \varepsilon_1 - \frac{\pi^2 L^2}{4F^2 \varepsilon_1 (m+n+1)^2} \quad (21)$$

从腔的稳定性条件看, 既然  $\varepsilon_1 < 0$ , 则必有  $\varepsilon_2 < 0$ , 从而有

$$\varepsilon_1 < \Delta R \quad (22)$$

这也是对  $\Delta R$  的约束条件。

至此, 推出了给定  $\varepsilon_1$  的条件下,  $\Delta R$  应该满足的一些约束条件, 它可统一表述为

$$\begin{cases} \max\{\varphi_1, \varepsilon_1\} < \Delta R < \min\{\varphi_2, \varphi_3\} & \left(-\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}} \leq \varepsilon_1 < 0\right) \\ \max\{\varphi_1, \varepsilon_1\} < \Delta R < \min\{\varphi'_1, \varphi_3\} \text{ 或 } \max\{\varphi'_2, \varepsilon_1\} < \Delta R < \min\{\varphi_2, \varphi_3\} & \left(\varepsilon_1 < -\sqrt{\frac{\lambda L}{4F}}\right) \end{cases} \quad (23)$$

这里  $\max\{A, B\}$  表示  $A, B$  中取大的,  $\min\{A, B\}$  表示  $A, B$  中取小的。

这些约束条件是以下三种约束的反映: A. 稳定性约束条件; B. 横向光程差最小和精细常数对孔径的要求条件; C. 精细常数对横模简并要求条件。图 3 中给出了数值计算结果, 阴影部分为对  $\Delta R$  的约束区域(不包含零点)。计算结果表明, 约束区域为一封闭回路, 该约束区域不仅反映了对  $\Delta R$  的约束, 而且也反映了对  $\varepsilon_1$  (包括  $\varepsilon_2$ ) 的约束。从物理上说, 横向光程差最小的条件和精细常数对孔径的要求条件限制了  $\Delta R$  的取值范围。而精细常数对横模简并的要求条件限制了  $\Delta R$  的极值, 也限制了  $\varepsilon_1$  的取值范围。稳定性条件要求离焦量均为负离焦。计算结果还表明, 对  $\Delta R$  的约束是相当严格的, 如当  $\varepsilon_1 = -10 \mu\text{m}$  时,  $\Delta R$  应满足

$$-0.4 \mu\text{m} < \Delta R \leq -0.15 \text{ 或 } 0.15 \leq \Delta R < 0.4$$

由于  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \Delta R$ , 故类似地也可以讨论  $\Delta R$  与  $\varepsilon_2$  的关系, 进而可以讨论  $\Delta R$  与  $\varepsilon_0$  的关系。另外, 由于  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  必须同时小于零, 因此(6)式中  $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  与  $\frac{L}{2} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^2$  的符号相反, 换言之,  $\Delta R$  在其约束条件允许的范围可以通过  $\varepsilon_1$  或  $\varepsilon_2$  予以补偿。

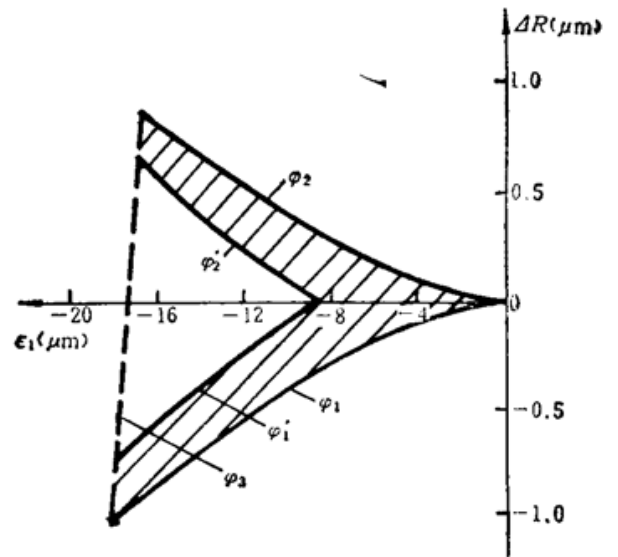


Fig. 3 Calculating results of restraint conditions for  $\Delta R$

$\lambda = 0.59 \mu\text{m}$ ,  $L = 50000 \mu\text{m}$   
 $F = 100$ ,  $m+n+1 = 45$

### 参 考 文 献

- 1 M. Hercher, *Appl. Opt.*, **7**(5), 951(1969)
- 2 赵燕曾 *et al.*, 科学通报, **24**(4), 170(1979)
- 3 周炳琨 *et al.*, 激光原理(国防工业出版社, 1980), 327

(收稿日期: 1989年4月2日)