

# 强激光超短脉冲在非线性质中传输引起的超加宽

连合 谭维翰

(中国科学院上海光机所, 2018001)

**摘要:** 利用以三阶非线性系数为基础的平面波理论, 通过直接解非线性波动方程, 研究强场 ( $\sim 10^{14} \text{W/cm}^2$ ) 作用下, 超短脉冲(80fs)在非线性质中传播所引起的光谱超加宽现象。在忽略色散效应的情况下, 得到输出脉冲 Stokes 和反 Stokes 展宽的不对称性, 并定量地解释了 R. L. Fork 等人的实验。

**关键词:** 超加宽, 非线性光学, 强场物理

## Supercontinuum of high intensity ultrashort laser pulse in nonlinear medium

Lian He, Tan Weihan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

**Abstract:** Spectral supercontinuum of high intensity ultrashort-pulse propagating in a non linear medium is calculated directly by solving the nonlinear-wave equation based on the cubic nonlinearity. When the dispersive effect and the steepening effect are excluded, the result yields an asymmetric Stokes-anti-Stokes supercontinuum, which agrees quantitatively with the experiment of Fork et al.

**Key words:** supercontinuum, nonlinear optics, strong field physics

### 一、引言

对超短脉冲在非线性质中传输引起光谱加宽的研究中, 传统理论总离不开体现自相位调制的非线性修正项<sup>[1]</sup>。这种由自聚焦产生的自相位调制理论或者四波参量过程, 可以对超加宽的实验结果给予一定的解释。而没有自聚焦和击穿情况下的自相位调制理论, 采用对非线性波动方程的微扰计算同样能给出解释, 但理论结果比测量结果小得多, 且不能说明超加宽实验中观察到的斯托克斯和反斯托克斯的不对称性。Anderson 和 Lisak 改善了传统理论, 得到脉冲畸变, 即不对称性的定性解释, 但仍然采用了慢变振幅近似<sup>[2]</sup>。文献[3]不再局限于慢变振幅近似, 采用以三阶非线性为基础的平面波模型, 得到波形畸变等较好的定量结果, 这些结果后来也被 Alfano 等人用不同的理论方法得到<sup>[4]</sup>。但在光强继续增大到较大时, 他们的结果与实验的偏离仍不能忽视。

本文在保留高次项的条件下直接求解非线性波动方程, 从而得到与实验结果更为吻合的

结果。当在时间坐标中解出忽略了色散效应的非线性平面波波动方程后, 计算过程就自动包含了自相位调制效应和四波混频效应。

## 二、理论计算

只考虑激光传播的一维问题, 非线性平面波波动方程取

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(3)} \quad (1)$$

其中  $E(z, t) = s(z, t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t)$ ;  $P^{(3)}(z, t) = \chi^{(3)} |E|^2 E$ ,  $\chi^{(3)}$  是三阶非线性极化率系数。

定义计算算符

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{n_0}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

于是方程(1)变成

$$\begin{aligned} 2ik_0 D_+ s &= -D_-(D_+ s) + \left\{ -\frac{4\pi\omega_0^2 \chi^{(3)}}{c^2} \left[ 1 + \left( \frac{2i}{\omega_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] |s|^2 s \right. \\ &= -D_-(D_+ s) - \Lambda \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 |s|^2 s \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $\Lambda = \frac{4\pi\omega_0^2}{c^2} \chi^{(3)} = 2n_2 n_0 k_0^2$ , 本文取  $n_0 \sim 1$

### 1. 文献[3]的解

利用  $D_- = -\frac{2n_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + D_+$ , 将(2)式化为

$$\left( 1 - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) D_+ s + \frac{1}{2ik_0} D_+^2 s = -\frac{\Lambda}{2ik_0} \left( 1 - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 |s|^2 s$$

对  $D_+$  进行迭代计算, 并略去高次项

$$(\chi^{(3)} |s|^2)^m s, \quad m \geq 2 \quad \text{于是得}$$

$$D_+ s \approx -\frac{\Lambda}{2ik_0} \left( 1 - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) (|s|^2 s)$$

稍加整理后, 有

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{n_0}{c} \left( 1 + \frac{n_2}{n_0} |s|^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] s = i \frac{n_2 \omega_0}{c} |s|^2 s \quad (3)$$

解(3)式得

$$|s|^2 = A^2 / \cosh[\chi - Q |s|^2 / A^2]$$

其中

$$\chi = \left( t - \frac{n_0 z}{c} \right) / \tau, \quad Q = \frac{n_2 A^2 z}{c\tau}$$

这里边界条件取下面形式

$$|s(0, t)|^2 = A^2 / \cosh(t/\tau)$$

### 2. 本文的解

为计算方便,我们采用新的归一化变量

$$\xi = \left( z - \frac{c}{n_0} t \right) / c\tau, \quad \eta = z / c\tau$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c\tau} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{n_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c\tau} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

所以计算算符

$$D_+ = \frac{1}{c\tau} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad D_- = \frac{1}{c\tau} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

代入(2)式可得

$$\frac{2ik_0}{c\tau} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 c\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \varepsilon + \left( \frac{1}{c\tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} = -\Lambda \left( 1 + \frac{1}{ik_0 c\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 |\varepsilon|^2 \varepsilon \quad (4)$$

现将  $\varepsilon$  的解用待定函数  $f(|\varepsilon|^2)$  来表示,  $f(|\varepsilon|^2)$  与  $\varepsilon$  的关系为

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} &= -\frac{\Lambda}{2ik_0} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 c\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(|\varepsilon|^2) \varepsilon \\ &\approx -\frac{\Lambda}{2ik_0} f(|\varepsilon|^2) \left( 1 + \frac{1}{ik_0 c\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varepsilon \end{aligned} \quad (5)$$

在这里我们对  $f(|\varepsilon|^2)$  采取近似处理  $\left| \varepsilon \frac{\partial f(|\varepsilon|^2)}{\partial \xi} \right| \ll \left| f(|\varepsilon|^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right|$  因为我们认为谱加宽主要是相位调制引起的,而不是振幅调制。

设

$$\varepsilon = E_0 a e^{i\alpha}, \quad (6)$$

式中  $a$  为归一化振幅。把(5)、(6)两式代入(4)式,并作实部和虚部的分离,立即有

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} &= \frac{1}{c\tau} \frac{\Lambda E_0^2}{2k_0^2} \frac{a^2}{1 + \frac{\Lambda}{(2k_0)^2} f(|\varepsilon|^2)} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \\ \frac{1}{c\tau} \frac{\partial a}{\partial \eta} &= \frac{\Lambda E_0^2}{2k_0} \frac{a^2}{1 + \frac{\Lambda}{(2k_0)^2} f(|\varepsilon|^2)} + \frac{1}{c\tau} \frac{\Lambda E_0^2}{2k_0^2} \frac{a^2}{1 + \frac{\Lambda}{(2k_0)^2} f(|\varepsilon|^2)} \frac{\partial a}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (7)$$

同样,将(5)式作实部和虚部的分离,则

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} &= \frac{1}{c\tau} \frac{\Lambda}{2k_0^2} f(|\varepsilon|^2) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \\ \frac{1}{c\tau} \frac{\partial a}{\partial \eta} &= \frac{\Lambda}{2k_0} f(|\varepsilon|^2) + \frac{1}{c\tau} \frac{\Lambda}{2k_0^2} f(|\varepsilon|^2) \frac{\partial a}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (8)$$

比较(7)、(8)两式,可得

$$\frac{E_0^2 a^2}{1 + \frac{\Lambda}{(2k_0)^2} f(|\varepsilon|^2)} = f(|\varepsilon|^2)$$

于是求出

$$f(|\varepsilon|^2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda E_0^2 a^2}{k_0^2}}}{\frac{\Lambda}{2k_0^2}}$$

最后解(8)式,可以很容易得到

$$a = \psi\left(\frac{\Delta f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2} \eta + \xi\right)$$

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\Delta f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2} \eta + \xi\right) - k_0 c \tau \xi$$

其中函数  $\psi$  和  $\Phi$  的具体形式由边界条件来定。

### 3. 数值计算

如果边界条件取作

$$a(0, t) = 1/\cosh(t/\tau)$$

$$\alpha(0, t) = 0$$

则

$$a = 1/\cosh\left(\frac{\Delta f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2} \eta + \xi\right)$$

对照第 1 部分  $\chi = \left(t - \frac{n_0 z}{c}\right)\tau$ , 经过展开和整理, 得

$$a = 1/\cosh\left(\chi - \frac{n_2 z}{c\tau} |\varepsilon|^2 + 1.7 \frac{n_2^2 z}{c\tau} |\varepsilon|^4 - 0.5 \frac{n_2^3 z}{c\tau} |\varepsilon|^6 + \dots\right)$$

可见本文求得的  $a$  的展开式, 当略去  $|\varepsilon|^4$  以后的高次项时, 就是参考文献[3]的结果。

图 1 给出归一化振幅  $a^2$  与变量  $t$  的关系。

下面, 我们主要讨论相位调制问题。

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\Delta f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2} \eta + \xi\right) - k_0 c \tau \xi$$

利用边界条件  $\alpha(0, t) = 0$ , 立刻可得  $\alpha$  的具体解:

$$\begin{aligned} \alpha &= k_0 c \tau \frac{\Delta}{2k_0^2} f(|\varepsilon|^2) \frac{z}{c\tau} \\ &= k_0 z \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta E_0^2 a^2}{k_0^2}}\right) \end{aligned}$$

其中  $f(|\varepsilon|^2)$  表式中的负号经验证不符合实际意义, 故略去。于是相位调制

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0 = \frac{\Delta E_0^2}{k_0^2 c} \frac{a \frac{\partial a}{\partial t}}{\sqrt{1 + \frac{\Delta E_0^2 a^2}{k_0^2}}} z$$

对照参考文献[4]即 R.L.Fork 等人的实验, 可以求得一系列  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0$  的值。对应每一个  $z$  值的最大  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0$  和最小  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0$ , 分别对应反斯托克斯和斯托克斯展宽。如果取强度  $\sim 6 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , 三阶非线性折射率  $n_3 \sim 10^{-22} \text{ MKS}$ , 波长 627.4 nm, 脉宽 80 fs,  $n_0 \sim 1$ , 于是在  $z = 0.5 \text{ mm}$  处, 对应于反斯托克斯和斯托克斯的相位调制分别是  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0 \Big|_{\max} \approx 2.5$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0 \Big|_{\min} \approx -0.46$ 。

R.L.Fork 等人的实验中测得  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0 \Big|_{\max} \approx 2.3$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} / \omega_0 \Big|_{\min} \approx -0.6$ 。

从以上结果, 可以看出输出脉冲波形是不对称的, 而且本文理论计算的结果与实验测量有

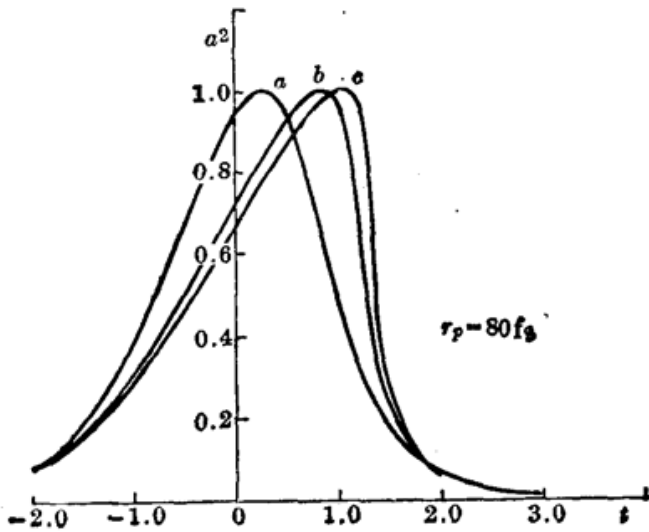


图1 归一化振幅平方随时间的变化关系

- (a)  $z=0.2\text{mm}$ ; (b)  $z=0.5\text{mm}$ ;  
(c)  $z=0.6\text{mm}$

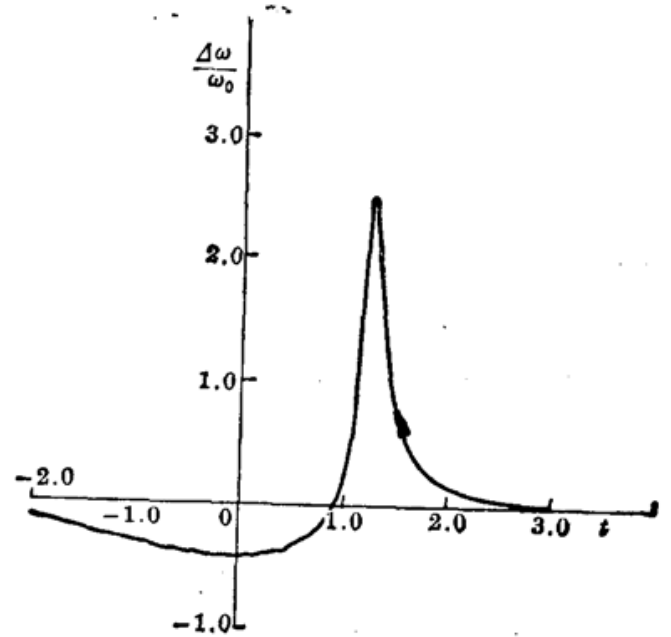


图2 相位调制  $\Delta\omega/\omega_0$  随时间的变化关系

- $z=0.5\text{mm}$ ,  $\tau=80\text{fs}$   
 $\tau=80\text{fs}$

非常好的吻合。注意到参考文献[3]中的结果分别是  $\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0|_{\max} \approx 3.5$ ,  $\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0|_{\min} \approx -0.54$

图2给出在  $z=0.5\text{mm}$  处, 相位调制随时间的变化关系。

最后应该指出, 计算结果与实验相比较, 仍然存在有不大的偏离。这除了实验测量可能存在的误差外, 在上述计算的理论模型中, 我们没有考虑到崩塌效应的影响, 也忽略了色散效应。而在某种意义上, 共振色散可能通过增大三阶非线性极化率系数和非线性折射率, 影响到输出波形的不对称性。

### 参 考 文 献

- 1 N. Tzoar, M. Jain, *Phys. Rev.*, **23**(3), 1266~1270(1981)
- 2 D. Anderson, M. Lisak, *Phys. Rev.*, **A27**, 1393~1398(1983)
- 3 G. Yang, Y. R. Shen, *Opt. Lett.*, **9**, 510~512(1984)
- 4 E. L. Fork *et al.*, *Opt. Lett.*, **8**(1), 1~3(1983)