

双轴晶体有效倍频系数的计算

尹 鑫

(山东大学晶体材料研究所, 250100)

Calculation of effective frequency-doubling coefficients of biaxial crystals

Yin Xin

(Institute of Crystal Materials, Shandong University, Jinan)

Abstract: The separating effect of \mathbf{D} and \mathbf{E} vectors of the fundamental frequency wave and the difference of δ between the fundamental and the frequency-doubling waves are discussed. The calculated results of effective frequency-doubling coefficients of biaxial crystals belonging to five point groups are given in the principal optical axes coordinate system.

Key words: biaxial crystal, effective frequency-doubling coefficients

1975年, Hiromasa Ito 等人讨论了双轴晶体, 有效倍频系数的计算问题^[1, 2], 给出了解决这一问题的正确思想。王恭明等人曾指出了文献[1, 2]中关于坐标系选取的问题, 并以 $mm2$ 点群为例作了详细的讨论。以前的工作^[1~4]都忽略了基频波与倍频波 δ 值的不同, 也没有考虑基频光电位移矢量 \mathbf{D} 和电场强度矢量 \mathbf{E} 的离散效应。本文讨论了这些问题后, 给出双轴晶体五种点群在主光轴坐标系中有效倍频系数的计算公式。

一、双轴晶体有效倍频系数的表示

按照习惯排列, 双轴晶体的主折射率 $n_x < n_y < n_z$, 晶体主光轴坐标系的 x 、 y 和 z 轴分别与 n_x 、 n_y 和 n_z 一致。本文中凡涉及用 x 、 y 和 z 作为其它物理量的角标时, 一律用角标 1、2 和 3 表示。

根据 Biot-Frenel 定理^[1, 2], 波矢为 $\mathbf{K}(\theta, \phi)$ 的基频光在双轴晶体中传播, 要分解为振动矢量互相垂直的两束光, 慢光以 \mathbf{e}_1 表示, 快光以 \mathbf{e}_2 表示。根据电磁学原理, 电位移矢量 $\mathbf{D}^e(\omega)$ 和 $\mathbf{D}^{e_1}(\omega)$ 垂直于 \mathbf{K} (文献[1, 2] 忽略了 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的离散效应, 记为 $\mathbf{E}^{e_1}(\omega)$ 和 $\mathbf{E}^{e_2}(\omega)$ 垂直于 \mathbf{K}), 它们在三个坐标轴上的投影为

$$D_j^{e_1}(\omega) = a_j^{e_1}(\omega) D^{e_1}(\omega) \quad (1)$$

$$D_j^{e_2}(\omega) = b_j^{e_2}(\omega) D^{e_2}(\omega) \quad (2)$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \delta_1 - \sin \phi \sin \delta_1 \\ \cos \theta \sin \phi \cos \delta_1 + \cos \phi \sin \delta_1 \\ -\sin \theta \cos \delta_1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \sin \delta_1 - \sin \phi \cos \delta_1 \\ -\cos \theta \sin \phi \sin \delta_1 + \cos \phi \cos \delta_1 \\ \sin \theta \sin \delta_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中^[5]

$$\operatorname{tg}(2\delta_1) = \frac{\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \sin(2\phi) \cos \theta}{\left(\frac{\sin^2 \phi}{n_1^2} + \frac{\cos^2 \phi}{n_2^2}\right) - \left[\left(\frac{\cos^2 \phi}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{n_2^2}\right) \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{n_3^2}\right]} \quad (5)$$

上式中的 n_1 、 n_2 和 n_3 为晶体在基频光波长处的折射率。

光束为倍频光时, (1) 式和 (2) 式中的 δ_1 取 δ_2 , (5) 式中的 n_1 、 n_2 和 n_3 为倍频光波长时晶体的折射率。相应的, $a_j^{e_1}(2\omega)$ 用 (a'_1, a'_2, a'_3) 表示, $b_j^{e_1}(2\omega)$ 用 (b'_1, b'_2, b'_3) 表示。

在主光轴坐标系中, 基频光的电位移矢量与电场强度矢量有如下关系:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ϵ 为光频时晶体的介电常数, (6) 式可表示为

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

上式对基频光的慢光与快光可分别简记为

$$E_j^{e_1}(\omega) = n_j^{-2} D_j^{e_1}(\omega) \quad (j=1, 2, 3) \quad (8)$$

$$E_j^{e_2}(\omega) = n_j^{-2} D_j^{e_2}(\omega) \quad (j=1, 2, 3) \quad (9)$$

式中 n_j 为基频光波长时晶体的折射率。基频光慢光 $D^{e_1}(\omega)$ 和 $E^{e_1}(\omega)$ 标量振幅的关系为

$$\begin{aligned} [E^{e_1}(\omega)]^2 &= [E_1^{e_1}(\omega)]^2 + [E_2^{e_1}(\omega)]^2 + [E_3^{e_1}(\omega)]^2 \\ &= [n_1^{-2} D_1^{e_1}(\omega)]^2 + [n_2^{-2} D_2^{e_1}(\omega)]^2 + [n_3^{-2} D_3^{e_1}(\omega)]^2 \\ &= (n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2) (D^{e_1}(\omega))^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$D^{e_1}(\omega) = \left(\frac{1}{n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} E^{e_1}(\omega) \quad (11)$$

同理可解得

$$D^{e_2}(\omega) = \left(\frac{1}{n_1^{-4} b_1^2 + n_2^{-4} b_2^2 + n_3^{-4} b_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} E^{e_2}(\omega) \quad (12)$$

I 类位相匹配时, 二次谐波的极化矢量为^[1]

$$P_{e_1 e_1}^{e_2}(2\omega) = b_i^{e_2}(2\omega) d_{ijk} E_j^{e_1}(\omega) E_k^{e_1}(\omega) \quad (13)$$

将(8)、(1) 和(11)式代入上式解得

$$\begin{aligned} P_{e_1 e_1}^{e_2}(2\omega) &= b_i^{e_2}(2\omega) d_{ijk} n_j^{-2} a_j^{e_1}(\omega) n_k^{-2} a_k^{e_1}(\omega) \left(\frac{1}{n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2} \right) E^{e_1}(\omega) E^{e_1}(\omega) \\ &= d_{eff}^I E^{e_1}(\omega) E^{e_1}(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

同理可解得 II 类位相匹配时二次谐波的极化矢量为

$$\begin{aligned} P_{e_1 e_1}^{\circ 2}(2\omega) &= b_i^{\circ 2}(2\omega) d_{ijk} n_j^{-2} a_j^{\circ 1}(\omega) n_k^{-2} b_k^{\circ 2}(\omega) \\ &\times \left(\frac{1}{n_1^{-4} b_1^2 + n_2^{-4} b_2^2 + n_3^{-4} b_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} E^{e_1}(\omega) E^{e_1}(\omega) \\ &= d_{eff}^{II} E^{e_1}(\omega) E^{e_1}(\omega) \end{aligned} \quad (15)$$

三、双轴晶有效倍频系数的计算结果

如果令

$$G_1 = \frac{1}{n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2} \quad (16)$$

$$G_2 = \left(\frac{1}{n_1^{-4} b_1^2 + n_2^{-4} b_2^2 + n_3^{-4} b_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n_1^{-4} a_1^2 + n_2^{-4} a_2^2 + n_3^{-4} a_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$A_i = n_j^{-2} a_j^{\circ 1}(\omega) n_k^{-2} a_k^{\circ 1}(\omega) \quad (18)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{-4} (\cos^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \delta_1 + \sin^2 \phi \sin^2 \delta_1 - \frac{1}{2} \cos \theta \sin(2\phi) \sin(2\delta_1)) \\ n_2^{-4} (\cos^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \delta_1 + \cos^2 \phi \sin^2 \delta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta \sin(2\phi) \sin(2\delta_1)) \\ n_3^{-4} (\sin^2 \theta \cos^2 \delta_1) \\ n_2^{-2} n_3^{-2} (-\sin(2\theta) \sin \phi \cos^2 \delta_1 - \sin \theta \cos \phi \sin(2\delta_1)) \\ n_3^{-2} n_1^{-2} (-\sin(2\theta) \cos \phi \cos^2 \delta_1 + \sin \theta \sin \phi \sin(2\delta_1)) \\ n_1^{-2} n_2^{-2} (\cos^2 \theta \sin(2\phi) \cos^2 \delta_1 - \sin(2\phi) \sin^2 \delta_1 + \cos \theta \cos(2\phi) \sin(2\delta_1)) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B_i = n_j^{-2} a_j^{\circ 1}(\omega) n_k^{-2} b_k^{\circ 2}(\omega) \quad (20)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{-4} \left(-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi \sin(2\delta_1) + \frac{1}{2} \sin^2 \phi \sin(2\delta_1) - \frac{1}{2} \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\delta_1) \right) \\ n_2^{-4} \left(-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \phi \sin(2\delta_1) + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \sin(2\delta_1) + \frac{1}{2} \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\delta_1) \right) \\ n_3^{-4} \left(-\frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin(2\delta_1) \right) \\ n_2^{-2} n_3^{-2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) \sin \phi \sin(2\delta_1) - \sin \theta \cos \phi \cos(2\delta_1) \right) \\ n_3^{-2} n_1^{-2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos \phi \sin(2\delta_1) + \sin \theta \sin \phi \cos(2\delta_1) \right) \\ n_1^{-2} n_2^{-2} \left[-\frac{1}{2} (\cos^2 \theta + 1) \sin(2\phi) \sin(2\delta_1) + \cos \theta \cos(2\phi) \cos(2\delta_1) \right] \end{bmatrix} \quad (21)$$

则双轴晶有效倍频系数的形式可简记为

$$d_{eff}^I = G_1 b_i^{\circ 2}(2\omega) d_{ij} A_j \quad (22)$$

$$d_{eff}^{II} = G_2 b_i^{\circ 2}(2\omega) d_{ij} B_j \quad (23)$$

以上关于双轴晶有效倍频系数的讨论都限于主光轴坐标系。(22)和(23)式中倍频系数的

表1 双轴晶的有效倍频系数

点群	d_{ij} 的矩阵形式	克莱姆对称	$d_{eff}^I(XG_1)$	$d_{eff}^I(XG_2)$
222	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$	$d_{14}=d_{25}=d_{36}$	$d_{14}(b'_1A_4+b'_2A_5+b'_3A_6)$	$d_{14}(b'_1B_4+b'_2B_5+b'_3B_6)$
$m\bar{m}2$	$x//c$	$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1$ $+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$ $+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$d_{11}b'_1B_1$ $+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$ $+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
		$d_{13}=d_{35}$	$d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)$ $+d_{22}b'_2A_2$ $+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)$	$d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)$ $+d_{22}b'_2B_2$ $+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)$
		$d_{21}=d_{16}$	$d_{31}(b'_3A_1+b'_1A_5)$ $+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)$ $+d_{33}b'_3A_3$	$d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$ $+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)$ $+d_{33}b'_3B_3$
2	$x//b$	$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$	$d_{11}b'_1B_1+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$
		$d_{13}=d_{35}$	$+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
		$d_{14}=d_{25}=d_{36}$	$+d_{14}(b'_1A_4+b'_2A_5+b'_3A_6)$	$+d_{14}(b'_1B_4+b'_2B_5+b'_3B_6)$
	$y//b$	$d_{21}=d_{16}$	$d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)+d_{22}b'_2A_2$	$d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)+d_{22}b'_2B_2$
		$d_{23}=d_{34}$	$+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)$	$+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)$
		$d_{14}=d_{25}=d_{36}$	$+d_{25}(b'_1A_4+b'_3A_5+b'_3A_6)$	$+d_{25}(b'_1B_4+b'_2B_5+b'_3B_6)$
	$z//b$	$d_{31}=d_{15}$	$d_{31}(b'_3A_3+b'_1A_5)$	$d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$
		$d_{32}=d_{24}$	$+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)+d_{33}b'_3A_3$	$+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)+d_{33}b'_3B_3$
		$d_{14}=d_{25}=d_{36}$	$+d_{36}(b'_1A_4+b'_2A_5+b'_3A_6)$	$+d_{36}(b'_1B_4+b'_2B_5+b'_3B_6)$
	$x//b$	$d_{21}=d_{16}$	$d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)+d_{22}b'_2A_2$	$d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)+d_{22}b'_2B_2$
		$d_{23}=d_{34}$	$+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)$	$+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)$
		$d_{31}=d_{15}$	$+d_{31}(b'_3A_1+b'_1A_5)$	$+d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$
	$y//b$	$d_{32}=d_{24}$	$+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)+d_{33}b'_3A_3$	$+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)+d_{33}b'_3B_3$
		$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$	$d_{11}b'_1B_1+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$
		$d_{13}=d_{35}$	$+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
	$z//b$	$d_{31}=d_{15}$	$+d_{31}(b'_3A_1+b'_1A_5)$	$+d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$
		$d_{32}=d_{24}$	$+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)+d_{33}b'_3A_3$	$+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)+d_{33}b'_3B_3$
		$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$	$d_{11}b'_1B_1+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$
	$x//b$	$d_{13}=d_{35}$	$+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
		$d_{21}=d_{16}$	$+d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)$	$+d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)$
		$d_{23}=d_{34}$	$+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)+d_{22}b'_2A_2$	$+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)+d_{22}b'_2B_2$
	$y//b$	$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$	$d_{11}b'_1B_1+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$
		$d_{13}=d_{35}$	$+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
		$d_{21}=d_{16}$	$+d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)$	$+d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)$
	$z//b$	$d_{23}=d_{34}$	$+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)+d_{22}b'_2A_2$	$+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)+d_{22}b'_2B_2$
		$d_{31}=d_{15}$	$d_{31}(b'_3A_1+b'_1A_5)$	$d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$
		$d_{32}=d_{24}$	$+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)+d_{33}b'_3A_3$	$+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)+d_{33}b'_3B_3$
	1	$d_{12}=d_{26}$	$d_{11}b'_1A_1+d_{12}(b'_1A_2+b'_2A_6)$	$d_{11}b'_1B_1+d_{12}(b'_1B_2+b'_2B_6)$
		$d_{13}=d_{35}$	$+d_{13}(b'_1A_3+b'_3A_5)$	$+d_{13}(b'_1B_3+b'_3B_5)$
		$d_{21}=d_{16}$	$+d_{21}(b'_2A_1+b'_1A_6)+d_{22}b'_2A_2$	$+d_{21}(b'_2B_1+b'_1B_6)+d_{22}b'_2B_2$
	$x//b$	$d_{23}=d_{34}$	$+d_{23}(b'_2A_3+b'_3A_4)$	$+d_{23}(b'_2B_3+b'_3B_4)$
		$d_{31}=d_{15}$	$+d_{31}(b'_3A_1+b'_1A_5)$	$+d_{31}(b'_3B_1+b'_1B_5)$
		$d_{32}=d_{24}$	$+d_{32}(b'_3A_2+b'_2A_4)+d_{33}b'_3A_3$	$+d_{32}(b'_3B_2+b'_2B_4)+d_{33}b'_3B_3$

矩阵形式同样也应在主光轴坐标系中表示。现根据双轴晶主光轴与各点群对称要素的对应关系，给出其倍频系数的矩阵形式。 $mm2$ 点群的结晶轴 a 和 b 分别平行于两对称面的法线，其选取本来就有一定的人为性，其倍频系数的矩阵形式可由文献[3]中的六种合并为三种。其它点群也同样处理之。表 1 给出除对称心外，其它双轴晶五种点群有效倍频系数的计算结果。

参 考 文 献

- 1 Hirmasa Ito et al., *J. Appl. Phys.*, **46**(9), 3992(1975)
- 2 Hirmasa Ito et al., *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-10**(2), 247(1974)
- 3 王恭明 et al., *光学学报* **5**(5), 416(1985)
- 4 谢绳武 et al., *上海交通大学学报*, **1**, 37(1982)
- 5 尹鑫 et al., 中国激光, 待发表

(收稿日期: 1989 年 2 月 27 日)



新型铜-钨盘-氧化铝陶瓷结构风冷氩离子激光管

Ar^+ 激光器是大电流弧光放电器件，能量转换效率很低，即使是毫瓦级风冷 Ar^+ 激光器，每厘米放电长度也要承担 100 W 以上的热耗散量。同时还要求放电管壁材料经得住离子的轰击腐蚀。故通常只有导热极好的氧化铍陶瓷才能制做风冷 Ar^+ 激光放电管。我们在分析国内外现有管型基础上提出了一种新结构的铜-钨盘-氧化铝陶瓷放电管的设计方案。并据此研制成功小型风冷 Ar^+ 激光管。

Ar^+ 激光管的放电区部分由一组 95 氧化铝陶瓷环和铜导热片相间构成。铜片中间焊有钨盘。钨盘中心的小孔构成放电毛细管。这种设计相当于铜导热片从放电管内直接延伸到管外，成为风冷翼片(图 1)。其

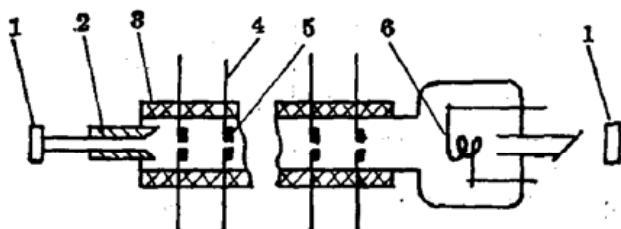


图 1 结构示意图

1—谐振腔 2—阳极 3—陶瓷；4—铜散热片；
5—钨盘；6—钡钨阴极

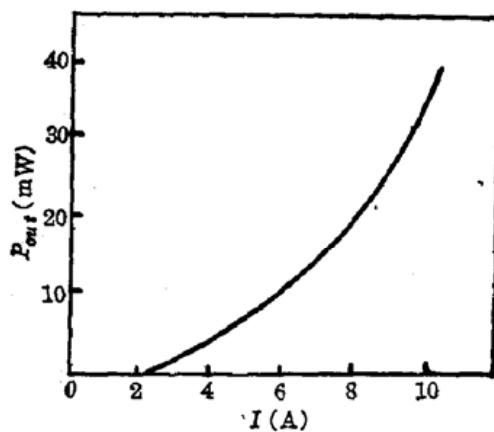


图 2 放电电流与输出功率的关系

优点是放电时产生的热量经过铜片直接传导到管外，被冷却气流所带走。样管放电区长 120 mm，放电毛细管直径 1.2 mm，半内腔，腔长 386 mm，谐振腔为平凹腔，输出端透过率 2%。管外套有套管，形成轴向风冷的风道。套管上绕有线圈，可提供中心最大强度约 400G 左右的轴向磁场。

当样管气压为 40Pa，放电电流 10 A，轴向磁场 400G 左右时，输出的蓝绿光功率不低于 40 mW。阈值电流 2.1 A。能量转换效率为 0.3×10^{-4} 。放电电流与输出功率的关系见图 2。在给定的轴向强制风冷条件下，注入总功率 1400 W 达到热平衡时，测得下风口冷却翼片基部温度为 120°C。该样管在实验室运转已超过 600 小时，性能保持稳定。

(长春光机学院光学物理系, 130022)

郁勤荣 王奎雄 马俊芝 1990 年 3 月 5 日收稿)