

# 光在锥形梯度折射率纤维中传播的变周期特性——几何光学分析\*

廖廷佛

(福建师范大学激光研究所,福州 350007)

**摘要:** 本文从光线轨迹方程出发,分析了光在锥形梯度折射率纤维中传播的变周期特性,导出锥形纤维中光线传播周期的解析表达式,给出若干锥形纤维的周期计算结果,四分之一周期长度及其相应的焦距值。

**关键词:** 梯度折射率,自聚焦纤维,光线传播

## Variable period characteristics of light propagation in a conical GRIN rod—geometrical optics analysis

Liao Tingdi

(Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou)

**Abstract:** In this paper based on the ray path equations, the variable period characteristics of light propagation in a conical GRIN rod are analyzed. The analytical expressions for the period of rod are obtained and used to calculate the periods of some conical GRIN rods. The quarter pitch rods and the corresponding focal lengths are also given for GRIN rod lenses design.

**Key words:** gradient index, selfoc fiber, ray propagation

### 一、引言

光在梯度折射率介质中的传播特性是梯度折射率光学的基本问题之一<sup>[1]</sup>。锥形梯度折射率纤维透镜是一种新颖的微型光学元件,近年来已逐渐引起国内外的关注<sup>[2~8]</sup>。这种纤维元件可望在光盘物镜、光纤耦合物镜等激光聚焦或准直场合获得应用,文献[8]还报道了在网格高速摄影机中应用的潜力。光线在锥形梯度折射率纤维中的传播及锥形纤维透镜的近轴成像问题已有若干研究,研究表明,不同于光线在柱形梯度折射率纤维中的传播,光在锥形梯度折射率纤维中的传播具有变周期和变幅值的振荡特征,本文从几何光学出发,着重研究了锥形梯度折射率纤维中光线传播的变周期特性。

收稿日期:1989年10月23日,收修改稿日期:1989年12月20日。

\*本文系福建省自然科学基金资助项目。

## 二、锥形纤维的光线轨迹方程

在直角坐标  $(x, y, z)$  下, 锥形梯度折射率纤维的折射率分布为<sup>[4]</sup>

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (1)$$

式中  $n_0$  为纤维轴中心的折射率  $n_0 = n(0, 0, z)$ ,  $g(z)$  为纤维沿  $z$  轴(光轴)的梯度参数,

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - z/L} = \frac{g_0}{t} \quad (z < L) \quad (2)$$

其中  $g_0 = g(0)$ ,  $t = 1 - \frac{z}{L}$ 。  $L$  为大端面到锥顶点间的距离。在几何光学近轴近似下, 光在锥形梯度折射率纤维中的传播遵循光线方程:

$$\ddot{H}(z) + g^2(z)H(z) = 0 \quad (3)$$

式中  $H(z) \equiv x(z)$  或  $y(z)$ ,  $\dot{H}(z) = \frac{d^2H}{dz^2}$ 。由(3)可解得满足初始条件

$$H_1(0) = 0 \quad \dot{H}_1(0) = 1 \quad (4a)$$

$$H_2(0) = 1 \quad \dot{H}_2(0) = 0 \quad (4b)$$

的入射光线在锥形纤维中的传播轨迹方程<sup>[4]</sup>

$$H_1(z) = -\frac{L}{b} \sqrt{t} \sin[b \ln t] \quad (5)$$

$$H_2(z) = \sqrt{t} \left[ \cos(b \ln t) - \frac{1}{2b} \sin(b \ln t) \right] \quad (6)$$

和斜率方程

$$\dot{H}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \cos(b \ln t) + \frac{1}{2b} \sin(b \ln t) \right] \quad (7)$$

$$\dot{H}_2(z) = \frac{g_0^2 L}{b \sqrt{t}} \sin(b \ln t) \quad (8)$$

式中  $b = \left( g_0^2 L^2 - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$  为常数。

(5)和(7)式描述了与轴有一夹角并在端面轴中心入射的光线在锥形纤维中的传播情况; (6)和(8)式描述了平行于光轴入射的光线在纤维中的传播。显然, 光线在锥形纤维中的传播与在柱形纤维中的传播相比, 有类似之处(含正弦函数), 但又有区别之处(变量为  $z$  的对数函数而不是  $g_0 z$ ), 且在  $L \rightarrow \infty$  的极限下, 锥形即化为柱形<sup>[6]</sup>。

## 三、锥形纤维的光线传播特性

考虑光线在端面轴中心斜入射情形。从(5)式可知, 光线在锥形梯度折射率纤维中的传播仍具有正弦振荡特征, 但其幅值最大值  $H_0(z) = \frac{L}{b} \sqrt{t}$  却随着传播距离  $z$  的增大而减小, 呈“衰减”特征, 而且光线与光轴的交点(即零点)在  $z$  轴上的分布也不是等间隔的。令  $H_1(z) = 0$  可得第  $m$  个零点的坐标  $z_m$ :

$$z_m = L \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m-1}{b} \pi\right) \right] \quad (9)$$

式中  $m=1, 2, 3, \dots$ 。这样, 相邻两个零点  $z_m$  与  $z_{m+1}$  之间的间隔, 即周期  $T_m$  为

$$\begin{aligned} T_m &= z_{m+1} - z_m \\ &= L \left[ \exp\left(\frac{\pi}{b}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{\pi}{b} m\right) \end{aligned} \quad (10a)$$

或 
$$T_m = T_0 \exp\left(-\frac{\pi}{b} m\right) \quad (10b)$$

式中  $T_0 = L \left[ \exp\left(\frac{\pi}{b}\right) - 1 \right]$  为周期常数。它取决于纤维的参数  $g_0, L$ 。

从(10)式可得  $T_1 = z_2 - z_1 = z_1, T_2 = z_3 - z_2, T_3 = z_4 - z_3, \dots$ 。显然,  $T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq \dots$ , 而且  $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ , 即对给定的纤维 ( $g_0, L$  一定), 振荡周期  $T_m$  随周期序数  $m$  而异, 并呈指数递减。因此, 把  $T_m$  称为“变周期”。

Table 1 Values of  $T_m$  for fibers with different  $g_0$  ( $L=15$ )

$T_m$ \ $m$ \ $g_0$	1	2	3	4	5
0.30	7.570	3.749	1.858	0.920	0.456
0.40	6.130	3.625	2.144	1.267	0.750
0.50	5.142	3.380	2.220	1.459	0.959
0.59	4.488	3.145	2.205	1.544	1.083

Table 2 Values of  $T_m$  for fibers with different  $L$  ( $g_0=0.59$ )

$T_m$ \ $m$ \ $L$	1	2	3	4	5
10	4.140	2.426	1.421	0.834	0.488
15	4.488	3.145	2.205	1.544	1.083
25	4.798	3.878	3.133	2.532	2.046
40	4.987	4.365	3.820	3.345	2.927

表 1 给出几种不同  $g_0$  但  $L=15$  的锥形纤维的前 5 个周期 ( $m=1 \sim 5$ ) 的计算结果。表 2 为几种不同  $L$  但  $g_0=0.59$  的锥形纤维的  $T_m$  计算结果。从表中结果可知, 当  $g_0, L$  一定时,  $T_m$  随  $m$  增大而迅速减小; 当  $L$  一定时,  $T_m$  随  $g_0$  增大而减小; 而当  $g_0$  一定时,  $T_m$  随  $L$  增大而增大, 且  $T_1$  逐渐趋于柱形纤维的相应值  $\frac{1}{2} T = \frac{\pi}{g_0} = 5.325$ 。

根据方程(5)并利用表 1 和表 2 结果, 绘制光线轨迹, 如图 1 和图 2 所示。从图可见, 光线轨迹与柱形纤维中的正弦轨迹类似, 不同的是这里的光线传播周期及幅值是变化的, 不再是恒定不变的。即光线在锥形纤维中的传播具有变周期和变幅值的正弦振荡特征。了解这一特性对锥形纤维元件的设计是有意义的。

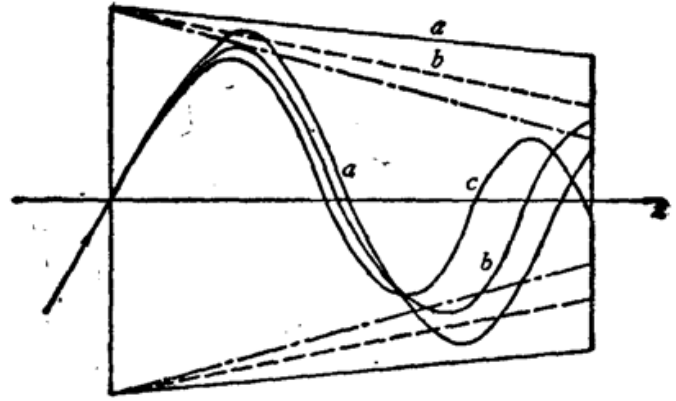
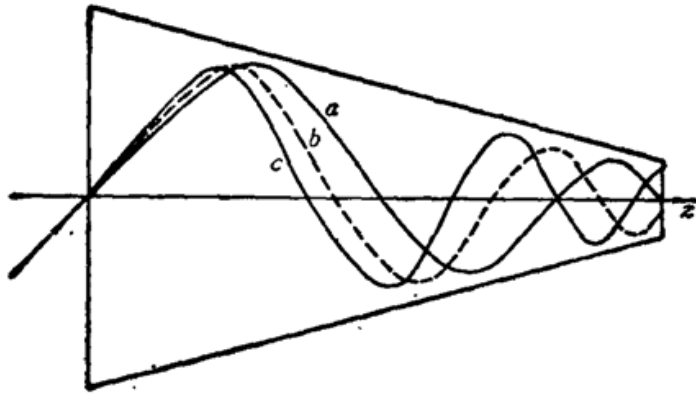


Fig. 1 Ray propagation in conical fiber for light incident with  $H_1(0)=1$  ( $L=15$ )  
 $a-g_0=0.40, b-g_0=0.50, c-g_0=0.59$

Fig. 2 Ray propagation in conical fiber for light incident with  $H_1(0)=1$  ( $g_0=0.59$ )  
 $a-L=40, b-L=25, c-L=15$

对于平行光入射情形, 从方程(6)出发, 也可得到类似的结论。例如零点  $z_{m'}$  及周期  $T_{m'}$ :

$$z_{m'} = L \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{1}{b} (\text{tg}^{-1}(2b) - m'\pi) \right] \right\} \quad (11)$$

$$T_{m'} = L \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\pi}{b} \right) \right] \exp \left[ \frac{1}{b} \text{tg}^{-1}(2b) \right] \cdot \exp \left( -\frac{\pi}{b} m' \right) \quad (12a)$$

或 
$$T_{m'} = T'_0 \exp \left( -\frac{\pi}{b} m' \right) \quad (m'=1, 2, 3, \dots) \quad (12b)$$

其中  $T'_0 = L \exp \left[ \frac{1}{b} \text{tg}^{-1}(2b) \right] \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\pi}{b} \right) \right]$  也为周期常数。

(11)、(12)式结果与文献[7]用波动光学方法推导的  $z_m$  在几何光学极限下得到的结果是一致的。而这里的方法简单, 结论直观、形象、明确。但得不到光束特性的信息, 因而有一定局限。

若  $b$  较大, 如  $b \geq 5$  时,  $\phi = \text{tg}^{-1}(2b) \simeq \frac{\pi}{2}$ , 这样(6)式可表示为

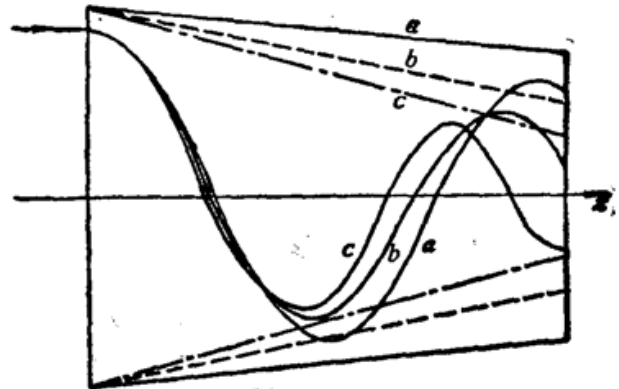
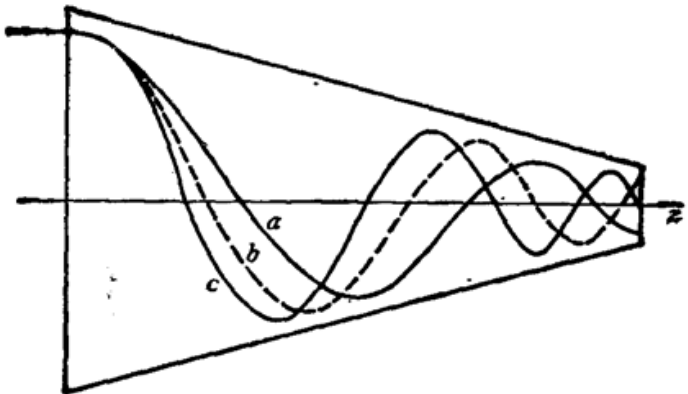


Fig. 3. Ray propagation in conical fiber for light incident with  $H_2(0)=0$  ( $L=15$ )  
 $a-g_0=0.40, b-g_0=0.50, c-g_0=0.59$

Fig. 4. Ray propagation in conical fiber for light incident with  $H_2(0)=0$  ( $g_0=0.59$ )  
 $a-L=40, b-L=25, c-L=15$

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= \frac{\sqrt{t}}{\sin \phi} \sin(\phi - b \ln t) \\
 &= (\sqrt{t} / \sin \phi) \cdot \cos(b \ln t)
 \end{aligned} \tag{13}$$

可见, 平行光入射时, 光线传播近似呈变幅值和变周期的余弦振荡特征。图 3 和图 4 给出了平行光入射时, 锥形梯度折射率纤维中的光线传播轨迹。纤维的有关参数同图 1、图 2。

在梯度折射率透镜的应用中, 特别是在激光聚焦或准直场合, 设计时通常选取纤维的厚度小于其四分一周长度(即  $1/4$ -pitch), 以获得一定的工作距。表 3 给出锥形纤维的“ $\frac{1}{4}$ -pitch”这一特征长度, 并给出相应的焦距值。表中末两行为同一  $n_0, g_0$  的柱形纤维的有关结果。

Table 3  $1/4$  pitch and focal length of conical fibers ( $n_0=1.5722, L=15$ )

$g_0$	0.59	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
$d$	2.523	2.948	3.625	4.702	6.665	11.115
$f'$	0.985	1.141	1.390	1.770	2.305	3.237
$d_0$	2.662	3.142	3.927	5.236	7.854	15.708
$f'_0$	1.078	1.272	1.590	2.120	3.180	6.361

从表中结果可知, 锥形纤维的“ $\frac{1}{4}$ -pitch”长度比柱形的短; 或者说, 锥形纤维的“ $\frac{1}{4}$ -pitch”长度相应的光焦度比柱形的大。而且两者的差别随着  $g_0$  的减小而增大。计算结果还表明, 随着锥形纤维的锥度  $m = \frac{r_1 - r_2}{d}$  的增大 ( $g_0, n_0, d$  一定), 其焦距  $f'$  与柱形的  $f'_0$  差别也越大, 且  $f' < f'_0$ 。这表明, 满足一定光焦度要求的锥形纤维的结构要比柱形纤维的小。表 3 的结果可供设计聚焦或准直用的锥形纤维透镜时参考。

综上所述, 光在锥形梯度折射率纤维中的传播具有变周期和变幅值的振荡特征。这一特性决定了锥形纤维具有成像孔径可变、结构紧凑及像质好的优点, 因此, 锥形纤维透镜可望在一些需要大数值孔径和高像质性能的微型光学和激光装置中起重要的作用。

### 参 考 文 献

- 1 刘德森, 物理, **17**(3), 143(1988)
- 2 殷宗敏 *et al.*, 物理学报, **30**(12), 1603(1981)
- 3 S. J. S. Brown, *Appl. Opt.*, **19**(7), 1056(1980)
- 4 O. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **23**(7), 1107(1984)
- 5 廖廷梯, 中国激光, **16**(5), 267(1989)
- 6 廖廷梯, 光学学报, **9**(9), 836(1989)
- 7 姚圩 *et al.*, 第三届全国纤维光学与集成光学学术交流会论文集(1988, 10, 湖南大庸), 59~60
- 8 龚祖同, 全国高速摄影会议论文集, (科学出版社, 北京, 1978), 1.