

# 光学厚柱对称等离子体光谱诊断 的分段线性插值解法\*

丁培柱 母英魁\*\* 潘守甫

(吉林大学原子与分子物理研究所, 长春 130023)

**提要:** 本文对光学厚柱对称等离子体提出了一种用分段线性插值法计算径向发射系数的数值方法, 并通过数值例子与 Young 迭代法作了比较, 结果表明, 本文的插值法是精确可靠的。它将广义 Abel 方程离散化为一个系数矩阵是上三角矩阵的线性代数方程组, 求解特别简单, 省机时。

**关键词:** 光学厚柱对称等离子体, 光谱诊断, 分段线性插值。

## A piecewise linear interpolation to spectrographic diagnosis for optically thick, cylindrically symmetric plasma

Ding Peizhu, Pan Shoufu

Mu Yingkui

(Jilin University, Changchun 130023)

(Changchun Finance Manager College, Changchun)

**Abstract:** A piecewise linear interpolation solution for obtaining the radial emission coefficient for optically thick, cylindrically symmetric plasma is presented. Two examples are evaluated with the present interpolation and Young's iteration. It is shown that the present interpolation is precise and reliable. By using the present interpolation, the generalized Abel equation is separated to a system of linear algebraic equations and the coefficient matrix of the system is an upper triangular matrix, so the present interpolation is very simple to evaluate and easy to master for experimentalists and less computation time is required.

**Keywords:** optically thick, cylindrically symmetric plasma, spectrographic diagnosis, piecewise linear interpolation

### 一、引言

在生产与实验中经常遇到光学厚柱对称等离子体<sup>[1]</sup>, 需要从观测到的辐射数据确定等离子体内部的发射与吸收性质, 即所谓的等离子体诊断, 它归结为求解 Abel 方程:

$$S(z) = 2 \int_0^R J(r) \cosh G(z, r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - z^2}} \quad (0 \leq z < R) \quad (1)$$

和

收稿日期: 1989年9月22日。

\* 本文属国家教委博士点基金项目。

\*\* 长春金融管理干部学院。

$$-\ln \tau(z) = 2 \int_z^R K(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - z^2}} \quad (0 \leq z < R) \quad (2)$$

$$G(z, r) = \int_z^r K(t) \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2}} \quad (0 \leq z < r \leq R) \quad (3)$$

式中,  $R$  是等离子体圆形截面的半径,  $S(z) = N(z)/\sqrt{\tau(z)}$ ,  $N(z)$  是横向辐射强度,  $\tau(z)$  是透射率,  $J(r)$  和  $K(r)$  分别是等离子体径向的发射系数和吸收系数。由测得的透射率  $\tau(z)$  的数值求解 Abel 方程(2)即可得到吸收系数  $K(r)$  的数值。再由(3)又可算出  $G(z, r)$  的数值, 这样, 光学厚问题就归结为广义 Abel 方程(1)的数值求解。1965年, Elder 等首次提出了一种迭代解法<sup>[1]</sup>, 但这种迭代法不收敛于(1)的真解。1981年, Young 修正了 Elder 等的错误, 建立了一种新的迭代法<sup>[2]</sup>, 但至今尚无有关收敛性与误差估计的讨论。1987年, Richardson 等给出了广义方程(1)的一种级数解法, 但仅适用于吸收系数  $K(r) \equiv A$  的弱电离等离子体。

本文提出了一种求解广义 Abel 方程(1)的分段线性插值法。这种方法将广义 Abel 方程(1)离散化成一个系数矩阵是上三角矩阵的线性代数方程组, 便于讨论可解性与误差估计; 非零矩阵元的计算与方程组的求解都特别简单, 省机时, 且易于为实验工作者掌握。本文还将  $J(r)$  与  $\cosh G(z, r)$  作分段线性插值, 将(1)离散化成系数矩阵是上三角矩阵的线性代数方程组, 并给出了全部非零矩阵元的计算公式。并用这种插值法计算了两个数值例子, 对结果进行了讨论, 且与 Young 迭代法的计算结果作了比较, 二者吻合得很好。

## 二、插 值 解 法

考虑光学厚柱对称等离子体垂直于轴线的一个截面, 如图1。将  $[0, R]$   $n$  等分, 各分点依次是

$$0 = z_0 = r_0 < z_1 = r_1 < \dots < z_{n-1} = r_{n-1} < z_n = r_n = R, \\ h = \frac{R}{n},$$

于是

$$z_k = kh, r_j = jh, k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

记

$$T(z, r) = \cosh G(z, r),$$

$$I(z, r) = J(r) \cosh G(z, r),$$

则方程(1)可离散化成

$$S(z_0) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} I(z_0, r) dr \quad (4)$$

$$S(z_k) = 2 \sum_{j=k}^{n-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} I(z_k, r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - z_k^2}} \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

在每条直线  $z = z_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) 上的各个小区间  $[r_j, r_{j+1}]$  ( $j = k, k+1, \dots, n-1$ ) 上, 用直线

$$P_j(z_k, r) = I(z_k, r_j) + \frac{r - r_j}{h} [I(z_k, r_{j+1}) - I(z_k, r_j)]$$

来拟合  $I(z_k, r)$ , 代入方程(4)和(5)并积分, 则方程(1)进一步离散化成

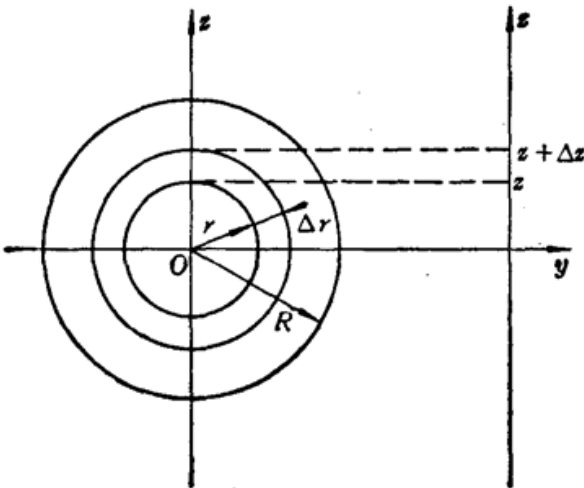


Fig. 1

$$S(z_0) = \sum_{j=0}^{n-1} h \{ T(z_0, r_j) J(r_j) + T(z_0, r_{j+1}) J(r_{j+1}) \},$$

$$S(z_k) = \sum_{j=k}^{n-1} h \{ [(j+1)C_{k,j} - D_{k,j}] T(z_k, r_j) J(r_j) + (D_{k,j} - jC_{k,j}) T(z_k, r_{j+1}) J(r_{j+1}) \} \quad k=1, 2, \dots, n-1,$$

$$C_{k,j} = 2 \{ \sqrt{(j+1)^2 - k^2} - \sqrt{j^2 - k^2} \},$$

其中  $D_{k,j} = (j+1) \sqrt{(j+1)^2 - k^2} - j \sqrt{j^2 - k^2} + k^2 \ln \frac{j+1 + \sqrt{(j+1)^2 - k^2}}{j + \sqrt{j^2 - k^2}}$ .

再经整理(注意  $J(r_n) = J(R) = 0$ )便得以  $J(r_j) (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$  为未知数, 系数矩阵为上三角矩阵的线性代数方程组

$$S(z_k) = \sum_{j=k}^{n-1} B_{k,j} J(r_j) \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

以及全部非零矩阵元的计算公式

$$\begin{cases} B_{kj} = h A_{kj} T(z_k, r_j) & k=0, 1, 2, \dots, n-1, j=k, k+1, \dots, n-1; \\ A_{00} = 1 \\ A_{0j} = 2 & j=1, 2, \dots, n-1, \\ A_{kk} = (k+1)C_{kk} - D_{kk} & k=1, 2, \dots, n-1, \\ A_{kj} = (j+1)C_{kj} - D_{kj} - jC_{k,j-1} + D_{k,j-1} & k=1, 2, \dots, n-2, j=k+1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (7)$$

解线性代数方程组(6)便得发射系数  $J(r)$  在各分点  $r_j (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$  上的近似值; 增多分点可提高精度。

可以证明, 对角矩阵元  $B_{kk} \neq 0 (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ , 所以线性代数方程组(6)有唯一解, 本文的分段线性插值法是可行的。至于误差估计, 我们将另文讨论。

### 三、数值例子

为了检验分段线性插值法的精度和实际可行性, 我们试算了两个数值例子。

1. 取  $R=1$ , 容易验证  $J(r) = 1 - r^2$  是当

$$\cosh G(z, r) = 1 + r^2 - z^2, \quad S(z) = \frac{4}{15} (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} (6 - z^2)$$

时广义 Abel 方程(1)的精确解。我们取  $n=20$ , 分别用本文的分段线性插值法与 Young 迭代法进行了计算, 表 1 就一些分点上的值作了比较: 表 1 中的值是在机时相差悬殊的情况下计算出来的。我们在表 2 中列出了 Young 迭代法  $n=10$  迭代 10 次与分段线性插值法  $n=40$  时一些分点上的计算值; 所需机时, Young 迭代法仍稍多于分段线性插值法。

2. 记  $R_0=2.4048$  是零阶 Bessel 函数  $J_0(r)$  的第一个零点。可以验证,  $J_0(r)$  是广义 Abel 方程(1)当

$$R = R_0, \quad \cosh G(z, r) = 1 + r^2 - z^2,$$

$$S(z) = 2(R_0^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ J_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left( \frac{R_0^2 - z^2}{2z} \right)^k (J_k(z) - 2kzJ_{k-1}(z)) \right\}$$

时的精确解,  $S(z)$  表达式中的  $J_k(z)$  是  $k$  阶 Bessel 函数。我们取  $n=20$  和  $n=40$ , 采用本文的分段线性插值法进行了计算, 表 3 列出了一些分点上的计算值。精确值取自 [3]。

表 1~表 3 说明, 本文的分段线性插值法是可靠的。表 1 中, 在通常最关心的等离子体轴线附近处, 分段线性插值法的精度优于 Young 迭代法; 虽然在它处稍逊, 但其相对误差皆低于

Table 1

$r_j$	exact values	PLI	Y'sI
0.00	1.	0.9998538	0.9957344
0.05	0.9975	0.9973589	0.9971536
0.15	0.9775	0.9774006	0.9775291
0.25	0.9375	0.9374768	0.9375296
0.35	0.8775	0.8775881	0.8775316
0.50	0.75	0.7503358	0.7500366
0.65	0.5775	0.5781843	0.5775441
0.80	0.36	0.3611086	0.3600554
0.90	0.19	0.191253	0.190063
0.95	0.0975	0.09991522	0.09758072

PLI—interpolation; Y'sI—Young's iteration

Table 2

$r_j$	exact values	PLI	Y'sI
0.0	1	0.9999552	0.9846469
0.1	0.99	0.9899631	0.9888828
0.2	0.96	0.9599808	0.9601322
0.3	0.91	0.9100022	0.9102378
0.4	0.84	0.8400351	0.8402651
0.5	0.75	0.7500798	0.7502996
0.6	0.64	0.6401339	0.6403386
0.7	0.51	0.5101997	0.510395
0.8	0.36	0.3603815	0.3604219
0.9	0.19	0.1903709	0.1906148

Table 3

$r_j$	exact values	$n=20$	$n=40$
0.0	1.	0.995547	0.997989
0.24048	0.985594	0.982734	0.984866
0.48096	0.943000	0.940451	0.942349
0.72144	0.874053	0.871845	0.873472
0.96192	0.781716	0.779949	0.781246
1.2024	0.669936	0.668710	0.669610
1.44288	0.543456	0.542873	0.543299
1.68336	0.407590	0.407747	0.407643
1.92384	0.267971	0.268881	0.268301
2.16432	0.130286	0.131557	0.130970

1% (仅在最外点  $r_{19}$  处相对误差为 2.48%, 但此处发射系数的数值已很小), 完全满足生产与实验对精度的要求; 况且分段线性插值法所需机时远少于 Young 迭代法。

## 参 考 文 献

- 1 P. Elder *et al.*, *Appl. Opt.*, **4**, 589(1965)
- 2 S. J. Young, *JQSRT*, **25**, 479(1981)
- 3 Л. А. Люстерник *et al.*, "Таблицы Бесселевых Функции", Гостехиздат, Москва(1949).