

## 电磁场的内禀角动量

邓锡铭 盛国平

(中国科学院上海光机所高功率激光物理联合实验室, 201800)

**提要:** 电磁场流体模型理论的基本点是把电磁场运动区分为轨道运动与内禀运动两部分<sup>[13,14]</sup>。本文试图从内禀运动部分引出内禀角动量的概念。为此, 建立了 $\hat{i}$ (虚数)算符; 导出了电磁场的自旋角动量与内禀角动量的关系。

**关键词:** 电磁场, 内禀角动量

## Intrinsic angular momentum of the electromagnetic field

*Deng Ximing, Sheng Guoping*

(High Power Laser and Physics Laboratory, Shanghai Institute of Optics  
and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

**Abstract:** The main point of the hydrodynamic model of electromagnetic field<sup>[13,14]</sup> is that; the motion of the electromagnetic field can be divided into two parts, the orbital motion and the intrinsic motion. In this paper we to define intrinsic angular momentum deduced from the intrinsic motion and a related  $\hat{i}$  (imaginary number) operator. Besides, the conservation property of the intrinsic angular momentum, the relations between the spin angular momentum and the intrinsic angular momentum of an electromagnetic field are described.

**Key words:** electromagnetic field, intrinsic angular momentum

利用 Kirchhoff 衍射积分或更进一步利用精确的衍射理论, 在原理上光束传输的描述已得到解决。但激光出现之后, 光束传输的理论和方法仍得到很大的发展<sup>[1~11]</sup>。Kogelnik (1965)建立了用来描写高斯光束传输的  $ABCD$  定律<sup>[1]</sup>。近年来, 光束纵向场分量的传输研究开始受到重视<sup>[8,9,11]</sup>, H. Hora 首先指出激光束纵向场分量对加速带电粒子所扮演的重要角色<sup>[8]</sup>。

另一方面, 9年前建立的用于描写光束传输的电磁场流体模型理论<sup>[13,14]</sup>的核心是把电磁场传输运动划分为轨道运动与内禀运动两个部分。两类运动能量的总和等于电磁场的能量。内禀运动能量是电磁场等效静止质量的组成部分之一。几何光学是完全不计及内禀运动的。内禀运动则支配着干涉、衍射等波动现象。两类运动不是独立无关而是相互作用、相互交换能量的。

流体模型理论的数学表达上, 虚数  $i$  扮演重要而又本质的角色, 不仅靠它来划分两类运

动, 而且  $\hat{i}$  又起一个算符的作用, 它赋与内禀角动量特殊的物理含义。

本文的分析和讨论均以麦克斯韦电磁场方程为出发点。虽然在论述中采用了许多光学术语和光学图像, 但所得到的结论不仅限于光学谱段, 而且适用于电磁场的各个谱段。

## 一、电磁场流体模型理论概述

文献[13, 14]已指出, 电磁场的传输运动可等效于一个可压缩流体的流动。流体的质量、密度、动量、动能分别与电磁场的有关参量一一对应。场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的直角坐标分量共六个。用  $\phi_0^2 = \phi^* \phi$  代表六个分量中任一分量的时间平均的能量密度。在稳态传输条件下, 满足标量方程

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1-1)$$

其解可表示为

$$\phi = \phi_0 e^{ikL} \quad (1-2)$$

其中  $\phi_0$ 、 $L$  均为空间坐标的实函数, 并称  $L$  为准程函。这样, 电磁场与等效流体之间的参数对应关系见表 1。与普通流体相比, 多了内禀运动部分。两部分运动由  $\hat{i}$  来划分, 例如动量密度, 可写成

$$\mathbf{p} = \frac{\phi_0^2 \nabla L}{c} - \frac{\hat{i}}{\omega} \phi_0 \nabla \phi_0 = -\frac{\hat{i}}{\omega} \phi^* \nabla \phi \quad (1-3)$$

表 1

流体参数	轨道运动部分	内禀运动部分
质量密度	$\frac{\phi_0^2}{c^2}$	$\frac{\phi_0^2}{c^2}$
速度分布	$c \nabla L$	$-i \frac{c}{k} \frac{\nabla \phi_0}{\phi_0}$
动量密度	$\frac{\phi_0^2}{c} \nabla L$	$-i \frac{1}{ck} \phi_0 \nabla \phi_0$
能量密度	$\phi_0^2 (\nabla L)^2$	$\frac{1}{k^2} (\nabla \phi_0)^2$
角动量密度	$\mathbf{r} \times \frac{\phi_0^2}{c} \nabla L$	$\mathbf{r} \times i \left( \frac{-1}{ck} \phi_0 \nabla \phi_0 \right)$

表中:  $c$  为光速,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\mathbf{r}$  为位置矢量,  $i=\sqrt{-1}$ 。

电磁场在真空中的传输对应没有外力作用下的流体流动。两类运动的相互作用由一个流体内部的张力张量  $\vec{F}$  来描写<sup>[14]</sup>, 且

$$\vec{F} = \phi_0^2 (-\nabla \varphi) \quad (1-4)$$

其中, 速度势

$$\varphi = -\frac{1}{2k^2} \left( \frac{\nabla \phi_0}{\phi_0} \right)$$

即流体内部的体张力  $\mathbf{T}$  满足

$$\mathbf{T} = \nabla \cdot \vec{F} \quad (1-5)$$

轨道运动受到张力  $\mathbf{T}$  的支配, 使得流体的流线与衍射光线重合。而张力  $\mathbf{T}$  则起源于内禀运动部分。忽略内禀运动, 即令  $\mathbf{T} = 0$ , 轨道运动的轨迹就是几何光学的光线。  $k \rightarrow \infty$ ,  $\hat{i} \rightarrow 0$ , 就属

于这种情形。而干涉、衍射则由无运动轨迹的内禀运动部分所支配(通过张力张量)。

文献[15]已证明,两部分运动能量的交换满足守恒原理。即在电磁场传输过程中,在垂直于传输轴的任一横截面上,轨道能量的垂直分量与内禀能量之和是不变量,即

$$\frac{1}{k^2} \int_{\text{全截面}} (\nabla\phi_0)^2 ds + \int_{\text{全截面}} \phi_0^2 (\nabla L)_\perp^2 dS \quad (1-6)$$

与横截面的位置无关。 $(\nabla L)_\perp$  是  $\nabla L$  垂直于传输轴的分量。

## 二、内禀角动量

根据电动力学,在真空中电磁场的角动量等于<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int_{\text{全空间}} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau \quad (2-1)$$

或写成<sup>[13]</sup>

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int \left[ \mathbf{E} \times \mathbf{A} + \sum_{j=1}^3 E_j^* (\mathbf{r} \times \nabla) A_j \right] d\tau \quad (2-2)$$

其中,  $\frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) d\tau$  为电磁场的自旋角动量。余项又可展开为( $\mathbf{E}$  矢量的分量共三个)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi c} \int \sum_{j=1}^3 E_j^* (\mathbf{r} \times \nabla) A_j \cdot d\tau \\ &= -\frac{2}{\omega} \int \sum_{j=1}^3 (\mathbf{r} \times i\phi_j \nabla \phi_j) d\tau + 2 \int \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{r} \times \frac{\phi_j^2}{c} \nabla L_j \right) d\tau \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中

$$\phi_j^2 = E_j^* E_j / 8\pi$$

若把  $i$  仅看作是  $\sqrt{-1}$ , 则积分

$$\int_{\text{全空间}} (\mathbf{r} \times i\phi_j \nabla \phi_j) d\tau \quad (2-4)$$

恒等于零, 即

$$\frac{1}{4\pi c} \int_{\text{全空间}} \sum_{j=1}^3 E_j^* (\mathbf{r} \times \nabla) A_j \cdot d\tau = 2 \int_{\text{全空间}} \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{r} \times \frac{\phi_j^2}{c} \nabla L_j \right) d\tau \quad (2-5)$$

正是由于(2-4)恒为零, 才导致 Jackson 合理地称(2-5)为“轨道角动量”, 而这与流体模型的描述是一致的。因为从表 1 得到, 轨道运动部分的轨道角动量显然等于( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  两个矢量的分量共六个)

$$\mathbf{M} = \int_{\text{全空间}} \sum_{j=1}^6 \left[ \mathbf{r} \times \left( \frac{\phi_j^2}{c} \nabla L_j \right) \right] d\tau \quad (2-6)$$

但表 1 列出的内禀运动部分, 其角动量(以下统称内禀角动量)则显然等于(单个场分量)

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{r} \times \left( -\frac{i}{\omega} \phi_0 \nabla \phi_0 \right) d\tau \quad (2-7)$$

我们对(2-7)的处理与 Jackson 不同, 不把  $i$  看作是  $\sqrt{-1}$ , 而是把  $i$  看作是一个算符, 作用于内禀动量密度矢量, 使该矢量绕电磁场传输轴转  $90^\circ$ ,  $\mathbf{I}$  就显示出它固有的物理内容。在现有的量子力学理论中, 在数学形式上也有与此相对应的部分, 但由于仅把  $i$  看作  $\sqrt{-1}$ , 把虚部固有的物理信息都湮没了。现沿着引进  $i$  算符的假定, 推导如下:

$$\therefore \nabla = \nabla_e \mathbf{e}_1 + \nabla_y \mathbf{e}_2 + \nabla_z \mathbf{e}_3 \quad (2-8)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  为沿  $x, y, z$  轴的单位矢量。选传输轴为坐标系统的  $z$  轴, 算符  $\hat{i}$  作用于  $\nabla$ , 得

$$(\hat{i}\nabla) = \pm \nabla \times \mathbf{e}_3 = \mp \nabla_x \mathbf{e}_2 \pm \nabla_y \mathbf{e}_1 \quad (2-9)$$

代回(2-2), 得到内禀角动量沿传输轴的分量:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I})_z &= \left[ -\frac{1}{\omega} \int \mathbf{r} \times \phi_0 (\mp \nabla_x \phi_0 \mathbf{e}_2 \pm \nabla_y \phi_0 \mathbf{e}_1) d\tau \right]_z \\ &= \pm \frac{1}{\omega} \int \left( x \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + y \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) d\tau \end{aligned} \quad (2-10)$$

$\omega$ : 电磁振动角频率

考虑到在无限远处电磁场的边界条件, 对全空间积分得

$$(\mathbf{I})_z = \pm \frac{\mathcal{E}}{\omega} \quad (2-11)$$

$\mathcal{E}$  是一个场矢量直角坐标分量的能量。这个结果表明单个场分量的内禀角动量的沿  $z$  轴的分量只与场分量的能量有关, 而与  $\phi_0$  的空间分布无关。如果  $\mathcal{E}$  等于一个光子的能量  $h\nu$ , 则

$$(\mathbf{I})_z = \pm \hbar \quad (2-12)$$

### 三、叠加规则

六个分量的内禀角动量按何种叠加规则才能反映出电磁场整体的内禀角动量? 理应按叠加后仍满足角动量守恒原理的原则进行叠加。其规则包括以下三点:

(a) 电、磁各自三个分量分别叠加, 组成电内禀角动量  $(\mathbf{I}'_e)_z$  与磁内禀角动量  $(\mathbf{I}'_h)_z$ ;  $\mathbf{I}'_e$  与  $\mathbf{I}'_h$  则按矢量合成规则确定  $\mathbf{I}'$  的方向; (b) 各自三个分量采用标量叠加, 叠加时要引进场矢量各分量的位相角; (c) 由(a)、(b)得出的带“,”的内禀角动量, 只对应于电磁场波面为平面的内禀角动量, 还要乘以光束发散度因子  $\cos I$ , 才最后得到真实电磁场的内禀角动量沿  $z$  轴的分量。

具体表述如下:

$$(\mathbf{I}'_e)_z = \sum_{\mu=1}^3 \left[ -\frac{1}{\omega} \int \cos \beta_\mu (\mathbf{r} \times \hat{i}\phi_0 \nabla \phi_0) d\tau \right]_{\mu z} \quad (3-1)$$

$$(\mathbf{I}'_h)_z = \sum_{\nu=1}^3 \left[ -\frac{1}{\omega} \int \cos \beta_\nu (\mathbf{r} \times \hat{i}\phi_0 \nabla \phi_0) d\tau \right]_{\nu z} \quad (3-2)$$

$\mu, \nu$  分别标出  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  各自的三个分量, 加“,”表示尚未乘以光束发散度因子。  $\beta$  取以下数值:

$$\begin{aligned} \beta_\mu &= 2k(L_\mu - L_0) \\ \beta_\nu &= 2k(L_\nu - L_0) \end{aligned} \quad (3-3)$$

取  $z$  轴为电磁场的传输轴,  $L_0$  为  $E_x$  的准程函,  $L_\mu, L_\nu$  为对应各自场分量的准程函。

取以下的能量归一化条件:

$$\sum_{\mu=1}^3 \left( \int \phi_0 d\tau \right)_\mu = \frac{1}{2}, \quad \sum_{\nu=1}^3 \left( \int \phi_0^2 d\tau \right)_\nu = \frac{1}{2} \quad (3-4)$$

对 TM 波, 有

$$(\mathbf{I}'_h)_z = \frac{1}{2\omega},$$

即

$$\mathbf{I}'_h \parallel \mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{I}'_e)_z = |\mathbf{I}'_e| \cos \theta_e = \frac{1}{2\omega} \cos \theta_e$$

$\theta_e$  为  $\mathbf{I}'_e$  与  $z$  轴的夹角。这样,  $\mathbf{I}'_e$  与  $\mathbf{I}'_h$  的合成矢量  $\mathbf{I}'$  与  $z$  轴的夹角显然等于  $\frac{1}{2} \theta_e$ , 故

$$(\mathbf{I}')_z = |\mathbf{I}'| \cos \frac{\theta_e}{2} = \frac{1}{\omega} \cos \frac{\theta_e}{2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1+2\omega(\mathbf{I}'_e)_z}{2}} \quad (3-5)$$

对 TE 波, 有

$$(\mathbf{I}'_e)_z = \frac{1}{2\omega}$$

即

$$(\mathbf{I}'_e) \parallel \mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{I}'_h)_z = |\mathbf{I}'_h| \cos \theta_h = \frac{1}{2\omega} \cos \theta_h$$

$\theta_h$  为  $\mathbf{I}'_h$  与  $z$  轴的夹角。这样,  $\mathbf{I}'_e$  与  $\mathbf{I}'_h$  的合成矢量  $\mathbf{I}'$  与  $z$  轴的夹角显然等于  $\frac{1}{2} \theta_h$ , 故

$$(\mathbf{I}')_z = |\mathbf{I}'| \cos \frac{\theta_h}{2} = \frac{1}{\omega} \cos \frac{\theta_h}{2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1+2\omega(\mathbf{I}'_h)_z}{2}} \quad (3-6)$$

最后,

$$(\mathbf{I})_z = (\mathbf{I}')_z \cos \Gamma \quad (3-7)$$

$$\cos \Gamma = \int \Phi_0^2 \cos \gamma d\tau$$

$\Phi_0^2$  为电磁场的能量密度, 即

$$\Phi_0^2 = \sum_{\mu=1}^3 (\phi_0^2)_\mu + \sum_{\nu=1}^3 (\phi_0^2)_\nu$$

$\gamma$  为  $\nabla L$  与  $z$  轴的夹角(即坡印亭能流矢量与  $z$  轴的夹角)。

#### 四、内禀角动量与自旋角动量的关联

建立在  $\hat{i}$  算符假设之上并从内禀运动演绎出来的内禀角动量与电磁场自旋角动量之间的关系是我们所感兴趣的。本节将证明, 它们之间满足以下关系式:

$$(\mathbf{I})_z^2 + (\mathbf{S})_z = \left( \frac{1}{\omega} \cos \Gamma_0 \right)^2 \quad (4-1)$$

其中,  $(\mathbf{S})$  为自旋角动量。对于在自由空间传输的实际光束都是有限束宽光束, 而

$$\cos \Gamma_0 = \int_{\frac{z \rightarrow \infty}{\Sigma}} \Phi_0^2 \cos \gamma ds \quad (4-2)$$

即两类角动量  $z$  分量的平方和与光束的偏振状态无关, 只与光束在远场的发散度有关。

在自由空间传输的任何相干、单色、能量归一化的电磁场, (4-1) 式均成立。对于单光子能量

$$(\mathbf{I})_z^2 + (\mathbf{S})_z^2 = (\hbar \cos \Gamma_0)^2 \quad (4-3)$$

在普遍证明之前, 先讨论一特例, 即沿  $z$  轴传输的椭圆偏振无限大匀幅平面波。它的场矢量各分量以及对应的  $\phi_0$ 、 $kL$ 、 $\beta$  见表 2。

表 2

	$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 分量	$\phi_0$	$kL$	$\beta$
$E_x$	$a \exp[i(kz - \omega t)]$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} a$	$kz$	0
$E_y$	$b \exp[i(kz + \frac{\pi}{2} - \omega t)]$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} b$	$kz + \frac{\pi}{2}$	$\pi$
$E_z$	0	0		
$H_x$	$b \exp[i(kz + \frac{\pi}{2} - \omega t)]$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} b$	$kz + \frac{\pi}{2}$	$\pi$
$H_y$	$a \exp[i(kz - \omega t)]$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} a$	$kz$	0
$H_z$	0	0		

电磁场自旋角动量  $\mathbf{S}$  可表示为<sup>[16]</sup>

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{A}} d\tau, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4-4)$$

这里只考虑时间平均值

$$(\mathbf{S})_z = \frac{1}{4\pi c} (\overline{E_x A_y - E_y A_x}) \quad (4-5)$$

参照表 2, 代入, 得

$$(\mathbf{S})_z = \frac{1}{8\pi\omega} \cdot 2ab \quad (4-6)$$

能量归一化的  $(\mathbf{S})_z$  等于

$$(\mathbf{S})_z = \frac{1}{\omega} \left( \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) \quad (4-6')$$

另一方面, 对应  $E_x$  和  $H_y$  以及  $E_y$  和  $H_x$  的内禀角动量,  $z$  分量分别等于

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{a^2}{8\pi} \quad \text{和} \quad -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{b^2}{8\pi} \quad (4-7)$$

第二项的“-”是  $\beta = \pi$  的结果。

$$\therefore (\mathbf{I})_z = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{a^2 - b^2}{8\pi}$$

能量归一化后的  $(\mathbf{I})_z$  等于

$$(\mathbf{I})_z = \frac{1}{\omega} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) \quad (4-7')$$

求(4-6'), (4-7')的平方和,

$$(\mathbf{I})_z + (\mathbf{S})_z = \left( \frac{1}{\omega} \right)^2 \quad (4-8)$$

如场的能量为  $h\nu$ , 由表 2 得

$$(\mathbf{I})_z + (\mathbf{S})_z = \hbar^2 \quad (4-9)$$

考虑到波面为平面,  $\gamma$  处  $H$  为 0, 故  $\cos \Gamma = \cos \Gamma_0 = 1$ , 即以上结果与(4-1)、(4-3)相符, 并有圆偏振:  $(\mathbf{S})_z = \hbar$ ,  $(\mathbf{I})_z = 0$ , 两个正交线偏振态的叠加;

线偏振:  $(\mathbf{S})_z=0$ ,  $(\mathbf{I})_z=\hbar$ , 两个左、右旋圆偏振态的叠加。  
显示出其对称性。

现对(4-1)式进行普遍证明。为计算简便而又不失其普遍性, 讨论在自由空间传输的任意柱形波面椭圆偏振电磁场(即准程函  $L$  不含  $y$  坐标)。场的各个分量如表 3 所示。

表 3

	$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 分量	$\phi_0$	$kL$	$\beta$	
				$z=z$	$z=\infty$
$E_x$	$ad[f(x, z)]\exp\{i[q(x, z)-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} ad[f(x, z)]$	$q(x, z)$	0	0
$E_y$	$b[f(x, z)]\exp\{i[q(x, z)+\frac{\pi}{2}-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} \cdot b[f(x, z)]$	$q(x, z)+\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\pi$
$E_z$	$ad[g(x, z)]\exp\{i[p(x, z)-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} ad[g(x, z)]$	$p(x, z)$	$p(x, z)-q(x, z)$	0
$H_x$	$bd[f(x, z)]\exp\{i[q(x, z)+\frac{\pi}{2}-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} bd[f(x, z)]$	$q(x, z)+\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\pi$
$H_y$	$a[f(x, z)]\exp\{i[q(x, z)-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} a[f(x, z)]$	$q(x, z)$	0	0
$H_z$	$bd[g(x, z)]\exp\{i[p(x, z)+\frac{\pi}{2}-\omega t]\}$	$\sqrt{\frac{1}{16\pi}} bd[g(x, z)]$	$p(x, z)+\frac{\pi}{2}$	$p(x, z)-q(x, z)+\pi$	$\pi$

其中, (1) 组成椭圆偏振的两个线偏振分量的能量比为  $\frac{a^2}{b^2}$ ;

$$(2) d \equiv \sqrt{\frac{F'}{F+G}}, \quad F \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, z)]^2 dx, \quad G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x, z)]^2 dx;$$

(3)  $f(x, z), g(x, z), p(x, z), q(x, z)$  均为  $x, z$  的实函数;

(4) 当  $z \rightarrow \infty, p(x, z) = q(x, z)$ 。

考虑位于远场( $z \rightarrow \infty$ )并垂直于传输轴的一个横截面。由表 3 得该截面的电磁场能量:

$$W = \frac{1}{8\pi} (a^2 + b^2) F \quad (4-10)$$

取归一化能量并分别计算  $(\mathbf{S})_z$  及  $(\mathbf{I})_z$

$$\begin{aligned} (\mathbf{S})_z &= \frac{1}{4\pi c W} \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{E_x A_y} - \overline{E_y A_x}) dx \\ &= \frac{abd}{4\pi\omega W} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, z)]^2 dx = \frac{1}{\omega} \left( \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) d \end{aligned} \quad (4-11)$$

在自由空间、 $z \rightarrow \infty$  的远场条件下, (4-11) 与 (4-6') 作比较, 为满足角动量守恒原理, 下式成立:

$$d = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0^2 \cos \gamma dx = \cos \Gamma_0 \quad (4-12)$$

$$\therefore (\mathbf{S})_z = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2ab}{(a^2 + b^2)} \cdot \cos \Gamma_0 \quad (4-13)$$

另一方面, 表 3 给出,  $z \rightarrow \infty, E_x, E_z, H_y$  三个分量的  $\beta=0, H_x, H_z, E_y$  三个分量的  $\beta=\pi$ , 引用(4-10)、(4-12)得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I})_z &= \frac{1}{\omega} \cdot \left( \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) \cdot d - \frac{1}{\omega} \cdot \left( \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \cdot d \\
 &= \frac{1}{\omega} \cdot \left( \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \right) \cdot \cos \Gamma_0
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

取(4-13)、(4-14)平方和得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I})_z^2 + (\mathbf{S})_z^2 &= \left( \frac{1}{\omega} \right)^2 \cdot \left[ \frac{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \right] \cdot \cos^2 \Gamma_0 \\
 &= \left( \frac{1}{\omega} \cos \Gamma_0 \right)^2
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

这就证明了,对处于远场( $z \rightarrow \infty$ )的一个截面, (4-1)成立, 本文附录将进一步证明, 对位于非远场的一个截面也成立。所以, 对全空间取积分, (4-1)式同样成立。此外, 本节的讨论只限于柱面波, 但其结论可推广到任意波面, 只是数学推导繁琐一点。因此, 内禀角动量与自旋角动量的关系式(4-1)是普遍适用的。

### 五、Stokes 参量与内禀参量

椭圆偏振的表示方法, 有所谓 Stokes 参量<sup>[10]</sup>, 它由四个元素组成, 即

$$\left. \begin{aligned}
 S'_0 &= a'^2 + b'^2 \\
 S'_1 &= a'^2 - b'^2 \\
 S'_2 &= 2a'b' \cos \delta \\
 S'_3 &= 2a'b' \sin \delta
 \end{aligned} \right\} \tag{5-1}$$

其中(见图 1),

$$\left. \begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= a'^2 + b'^2, \quad S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \\
 2ab &= 2a'b' \sin \delta
 \end{aligned} \right\} \tag{5-2}$$

现在, 分别用  $a, b$  取代 Stokes 参量中的  $a', b'$ , 得到另一组四元数, 称之为内禀-自旋参量:

$$\left. \begin{aligned}
 S_0 &= a^2 + b^2 \\
 S_1 &= a^2 - b^2 \\
 S_2 &= 2ab \cos \delta \\
 S_3 &= 2ab \sin \delta
 \end{aligned} \right\} \tag{5-3}$$

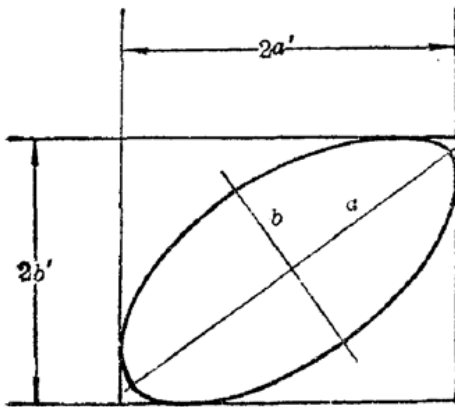


图 1

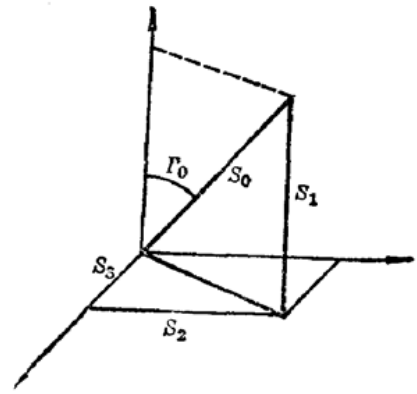


图 2



并有(图2)

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (5-4)$$

其中  $S_0$  正比于椭圆偏振电磁场能量,  $S_1$  正比于内禀角动量  $z$  分量,  $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$  正比于自旋角动量  $z$  分量。

## 六、结 论

(1) 电磁场流体模型理论的核心是区分实部的轨道运动和虚部的内禀运动; (2) 引入  $\hat{i}$  算符, 重新获得已往被“湮没”了的虚部的信息, 出现了内禀角动量; (3) 电磁场的内禀角动量与自旋角动量之间有内在联系。

衷心感谢 H. Hora 教授的宝贵意见以及王绍民教授在各个时期对本工作的支持和有原则意义的讨论; 感谢谭维翰、余文炎、范滇元研究员和张卫平对本工作的关心与帮助。特别感谢方洪烈同志早期的合作。

## 参 考 文 献

- 1 H. Kogelnic, *BSTJ*, **44**, 455 (1965)
- 2 H. Kogelnic, T. Li, *Proc. of the IEEE*, **54** (10), 1312 (1966)
- 3 M. Lax, W. H. Louisell, W. B. Mcknight, *Phys. Rev. A*, **11** (4), 1365 (1975)
- 4 H. G. Booker, P. C. Clemmow, *Proc. IEE*, **97**(3), 11~17 (1950)
- 5 A. E. Siegman, *JOSA*, **63**(9), 1098 (1973)
- 6 G. P. Agrawal, D. N. Pattanayak, *JOSA*, **69**(4), 575 (1979)
- 7 H. Hora, *Physics and Laser Driven Plasmas*, J. Wiley & Son, 1981, p. 230~240
- 8 H. Hora, *Laser and Particle Beams*, **6**, 625 (1988)
- 9 R. Pratesi, L. Ronchi, *JOSA*, **67**(9), 1274 (1977)
- 10 E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, **A204**, 533 (1951)
- 11 Lorenzo Cicchitelli, Ph. D., Thesis, Univ. of New South Wales, Australia, Chapter I, II (1988)
- 12 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Sect. 12.10
- 13 邓锡铭, 方洪烈, *激光*, **3**(1), 14~19 (1980)
- 14 邓锡铭, 方洪烈, *激光*, **6**(11), 1 (1979)
- 15 邓锡铭, 陈泽尊, *光学学报*, **3**(5), 185 (1983)
- 16 A. A. 索科洛天, *量子电动力学引论*(中译本), 1958, p. 45

## 附 录

本附录通过几个实例的计算, 以检验内禀角动量与自旋角动量的关系式, 考核内禀角动量的守恒性质, 以及对匀幅平面波的内禀角动量的理解等。

例1: 在间隔为  $a_0$  的无限大平行平板波导中传输的  $TM_{01}$  模电磁场的内禀角动量

取传输轴为  $z$  轴,  $x$  轴垂直于平行平板(图3)。考虑到平行于  $x$  轴的任一线段上的场分布都相同, 计算一维积分即可。在引入  $\beta$  之前, 各积分值一律取正值或负值, 以求划一(以下同)。能量归一化(一维)的六个场分量对应的  $\phi_0, kL, \beta$  示于表4。

引用(3-1)、(3-2)、(3-5), 计算相应的积分值后得

$$(I'_0)_z = \frac{1}{2\omega} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\sigma}{ka_0} \right)^2 \right];$$

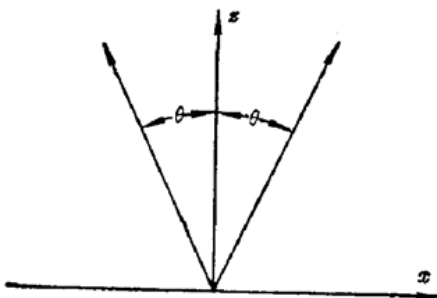


图 3

表 4

	$\phi_0$	$kL$	$\beta$
$E_x$	$\sqrt{\frac{1}{a_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi x}{ka_0}\right)$	$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2} (kz)$	0
$E_y$	0	0	
$E_z$	$\sqrt{\frac{1}{a_0}} \left(\frac{\pi}{ka_0}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{ka_0}\right)$	$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2} (kz) + \frac{\pi}{2}$	$\pi$
$H_x$	0	0	
$H_y$	$\sqrt{\frac{1}{a_0}} \cos\left(\frac{\pi x}{ka_0}\right)$	$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2} (kz)$	0
$H_z$	0	0	

$$(\mathbf{I}_h)_z = \frac{1}{2\omega};$$

$$(\mathbf{I}')_z = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2}$$

考虑到电磁场的波面为平面, 故有

$$\int_0^{a_0} \Phi_0^2 \cos \gamma dx = 1$$

$$\therefore (\mathbf{I})_z = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2} \quad (\text{A-1-1})$$

注意到在波导内传输的电磁场等效于两个波矢分别与  $z$  轴夹角均为  $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{ka_0}\right)$  的匀幅平面波的叠加, 而形成杨氏干涉条纹。但当  $a_0 \rightarrow \infty$ , 干涉条纹消失, 变成单一的匀幅平面波。这种极限状态, 虽然  $\frac{\partial \phi_0}{\partial x}$  处处为 0, 但  $(\mathbf{I})_z \neq 0$ ,  $(\mathbf{I})_z = |\mathbf{I}| = \frac{1}{\omega}$ 。并且, 内禀角动量矢量平行于波矢 ( $z$  轴)。另外, 当  $\theta \neq 0$ ; 即  $a_0 \neq \infty$ 。两等效的匀幅平面波在叠加前的内禀角动量各为  $\frac{1}{2\omega}$ , 它们的  $z$  分量之和为

$$2\left(\frac{1}{2\omega} \cos \theta\right) = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka_0}\right)^2}, \quad (\text{A-1-2})$$

在总能量相同的条件下, 刚好等于叠加后的结果 (A-1-1), 满足了角动量守恒原理的要求。

例 2: 在矩形 (宽  $a_0$ , 高  $b_0$ ) 波导中传输的  $\text{TM}_{mn}$  模电磁场的内禀角动量。取传输轴为  $z$  轴,  $x, y$  轴分别平行于波导的直角两边。在波导内, 垂直于  $z$  轴的每个截面的场分布均相同。只需计算二维积分。能量归一化 (二维) 的六个场分量的  $\phi_0, kL, \beta$  示于表 5。

其中,

$$A = \sqrt{\frac{32\pi}{a_0 b_0}} \left(\frac{k_0}{k}\right), \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b_0}\right)^2}, \quad k_0 = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_0}\right)^2}$$

引用 (3-1)、(3-2)、(3-5), 计算相应的积分值后, 得

$$(\mathbf{I}'_e)_z = \frac{1}{2\omega} \left[ 1 - 2\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \right]$$

$$(\mathbf{I}'_h)_z = \frac{1}{2\omega}$$

$$(\mathbf{I}')_z = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2}$$

表 5

	$\phi_0$	$kL$	$\beta$
$E_x$	$\frac{A\alpha}{k_0k} \left(\frac{n\pi}{a_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b_0}\right)$	$\alpha z$	0
$E_y$	$\frac{A\alpha}{k_0k} \left(\frac{m\pi}{b_0}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a_0}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b_0}\right)$	$\alpha z$	0
$E_z$	$A \sin\left(\frac{n\pi x}{a_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b_0}\right)$	$\alpha z - \pi$	$-\pi$
$H_x$	$\frac{A}{k_0} \left(\frac{m\pi}{b_0}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a_0}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b_0}\right)$	$\alpha z$	0
$H_y$	$\frac{A}{k_0} \left(\frac{n\pi}{a_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b_0}\right)$	$\alpha z$	0
$H_z$	0	0	

表 6

	$E, H$	$\phi_0$	$kL$	$\beta$
$E_x$	$(1-z_0)^{1/2} \cdot A_m \cdot H_m \cdot G_0 \cdot \exp[i(kL_0 - \omega t)]$	$(1-z_0)^{1/2} \cdot \frac{A_m}{\sqrt{16\pi}} \cdot H_m \cdot G_0$	$kL_0$	0
$E_y$	0	0		
$E_z$	$z_0^{1/2} \cdot A_{m+1} \cdot H_{m+1} \cdot G_0 \cdot \exp\{i[kL_0 + \alpha - \omega t]\}$	$z_0^{1/2} \cdot \frac{A_{m+1}}{\sqrt{16\pi}} \cdot H_{m+1} \cdot G_0$	$kL_0 + \alpha$	$2\alpha$
$H_x$	0	0		
$H_y$	$(1-z_0)^{-1/2} E_x$	$\frac{A_m}{\sqrt{16\pi}} \cdot H_m \cdot G_0$	$kL_0$	0
$H_z$	0	0		

考虑到波导内电磁场的波面均为平面, 故有

$$\int_{\text{全截面}} d_0^2 \cos \gamma ds = 1$$

$$\therefore (I)_z = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{ka_0}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{kb_0}\right)^2\right]} \quad (\text{A-2-1})$$

例 3:  $m$  阶厄米-高斯光束的两类角动量

为计算简便, 取一维  $m$  阶厄米-高斯光束, 即  $\phi_0$  中不含变数  $y$ 。先计算线偏振束的内禀角动量, 进一步考核其角动量守恒性质, 然后计算椭圆偏振束, 以检验两类角动量的关系式。注意到厄米-高斯光束只是电磁场微分方程组的近似解, 取  $\frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2} \ll 1$  ( $\sigma_0$ : 光腰半径),  $\left(\frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2}\right)^2$  项或更高阶小量在计算中均略去。先计算垂直于传输轴 ( $z$  轴) 的一个横截面。能量归一化 (二维) 的六个场分量示于表 6。

其中,

$$H_m = H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right), \quad G_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right), \quad z_0 = \left(\frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2}\right), \quad \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{k\sigma_0^2}{2z}\right)$$

$$kL_0 = kz + \frac{x^2}{2R} + (m+1)\alpha,$$

$$\sigma = \frac{1}{k\sigma_0} (k^2\sigma_0^4 + 4s^2)^{1/2}$$

$$R = \frac{k^2\sigma_0^4 + 4s^2}{4s}$$

$$A_m = \left( \frac{16\sqrt{2\sigma}}{m!2^m} \right)^{1/2}$$

对  $E_x$ :

$$\int_{\text{全截面}} \frac{1}{\omega} \hat{i}\phi_0 \nabla \phi_0 dS = \frac{1}{2\omega} \left( 1 - \frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2} \right)$$

对  $H_y$ :

$$\int_{\text{全截面}} \frac{1}{\omega} \hat{i}\phi_0 \nabla \phi_0 dS = \frac{1}{2\omega}$$

对  $E_z$ : 先算  $\cos \beta$  (见图 4)。

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos \left[ 2 \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{k\sigma_0^2}{2s} \right) \right] = \cos^2 \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{k\sigma_0^2}{2s} \right) \right] - \sin^2 \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{k\sigma_0^2}{2s} \right) \right] \\ &= \frac{(k^2\sigma_0^4 + 4s^2) - 2k^2\sigma_0^4}{k^2\sigma_0^2\sigma^2} = 1 - \frac{2\sigma_0^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{A-3-1})$$

$$\therefore \int_{\text{全截面}} \frac{1}{\omega} \hat{i}\phi_0 \nabla \phi_0 dS = \frac{1}{2\omega} \left[ (2m+1) \left( \frac{1}{k^2\sigma_0^2} - \frac{2}{k^2\sigma^2} \right) \right]$$

将以上三个积分值代入(3-1)、(3-2)得:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{I}'_e)_z &= \frac{1}{2\omega} \left[ 1 - \frac{2(2m+1)}{k^2\sigma^2} \right] \\ (\mathbf{I}'_h)_z &= \frac{1}{2\omega} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-2})$$

代入(3-5), 得

$$(\mathbf{I})_z = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1 + \left[ 1 - \frac{2(2m+1)}{k^2\sigma^2} \right]}{2}} = \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma^2} \right) \quad (\text{A-3-3})$$

注意到波面不是平面, 而且  $\frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2} \ll 1$ ,  $\frac{2m+1}{k^2\sigma^2} \ll 1$ 。此外,

$$\int_{\text{全截面}} \phi_0^2 \cos \gamma dS = 1 - \frac{1}{2}(2m+1) \left( \frac{1}{k^2\sigma_0^2} - \frac{1}{k^2\sigma^2} \right) \quad (\text{A-3-4})$$

(A-3-3)、(A-3-4)代入(3-7)得

$$\begin{aligned} (\mathbf{I})_z &= \frac{1}{\omega} \left\{ \left( 1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma^2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2}(2m+1) \left( \frac{1}{k^2\sigma_0^2} - \frac{1}{k^2\sigma^2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma_0^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-3-5})$$

从(A-3-5)可看出,  $(\mathbf{I})_z$  不含变数  $z$ , 即  $(\mathbf{I})_z$  不随截面位置改变而改变, 符合角动量守恒原理。此外, 还可证明, 多阶厄米-高斯光束的叠加也能得到同样结果。因此, 正文中第四部分导出的适用于远场( $s \rightarrow \infty$ )截面的结果, 同样适用于非远场截面。

现计算椭圆偏振光束的两类角动量。设两个正交线偏振光的能量比为  $\frac{a^2}{b^2}$ , 则六个场分量分别等于:

$$\begin{aligned} E'_x &= aE_x, \quad E'_y = bH_y \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad E'_z = aE_z \\ H'_x &= bE_x \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad H'_y = aH_y, \quad H'_z = bE_z \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

场能量(截面)

$$W = (a^2 + b^2) \quad (\text{A-3-6})$$

与前面的计算相比较, 容易得到:

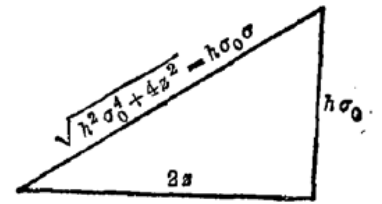


图 4

$$(I)_z = \frac{1}{\omega} (a^2 - b^2) \left(1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma_0^2}\right) \tag{A-3-7}$$

另一方面,

$$\overline{E'_x A'_y} - \overline{E'_y A'_x} = \frac{c}{\omega} ab \left(1 - \frac{2m+1}{k^2\sigma_0^2}\right)^{1/2} \left(\frac{16\sqrt{2\pi}}{m!2^m}\right) \left[H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right)\right]^2 \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-2x^2}{\sigma^2}\right) \tag{A-3-8}$$

$$\begin{aligned} \therefore (S)_z &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\text{全截面}} (\overline{E'_x A'_y} - \overline{E'_y A'_x}) dS \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot 2ab \cdot \left(1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma_0^2}\right) \end{aligned} \tag{A-3-9}$$

(A-3-5)、(A-3-9)平方相加

$$(I_z)^2 + (S_z)^2 = \frac{1}{\omega} (a^2 + b^2) \left(1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma_0^2}\right) \tag{A-3-10}$$

式中不含  $z$ , 即与截面所在位置无关。故这个结果适用于全空间。另外, 上式右边只与能量  $(a^2 + b^2)$  成正比, 而与比值  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$  即椭圆偏振度无关, 从而验证了(4-1)式。并且,

$$\begin{aligned} \cos \Gamma_0 &\equiv \int_{\text{全截面}} \Phi_0^2 \cos \gamma dS = \left(1 - \frac{2m+1}{2k^2\sigma_0^2}\right) \\ \therefore (I_z)^2 + (S_z)^2 &= \frac{1}{\omega} (a^2 + b^2) \cos \Gamma_0 \end{aligned} \tag{A-3-11}$$

## He-Ne 激光穴位照射治疗咳嗽

我们采用 JHN-450 型 He-Ne 激光器治疗了 109 例咳嗽患者(其中外感咳嗽 98 例, 内伤咳嗽 11 例), 除 2 例内伤咳嗽好转外其余均全愈, 疗效显著。激光波长为 632.8 nm, 导光纤输出功率  $\geq 3$  mW, 光斑直径为 5 mm。每日治疗 1 次, 每穴照射 5 min, 10 次为 1 疗程。疗程间隔 3~5 日。取穴如下: 外感咳嗽——肺俞、列缺、天突、合谷。发热加大椎、曲池。咽喉肿痛加人迎、少商; 内伤咳嗽(痰湿侵肺)——肺俞、太渊、章门、太白、丰隆; 内伤咳嗽(肝火炼肺)——肺俞、尺泽、阳陵泉、太冲。109 例的治疗次数和疗效详见下表:

疗效 治疗次数	病程	外感咳嗽		外感咳嗽		外感咳嗽		外感咳嗽		内伤咳嗽 (痰湿侵肺)		内伤咳嗽 (肝火炼肺)	
		3~5 天		5~10 天		10~20 天		20~30 天		1~3 年		3 年以上	
		全愈	好转	全愈	好转	全愈	好转	全愈	好转	全愈	好转	全愈	好转
3~5 次		21		2		1							
5~10 次		8		16		13		3					
10~15 次				12		11		2					
15~20 次						7		2		1			
20~25 次										2		2	
25~30 次										1		3	2

随访表明痰湿侵肺型内伤咳嗽虽经治愈, 但遇寒后仍有不同程度的发作。

(江苏省徐州市第四人民医院, 221009 激光室 张育勤)