第17卷 第6期
1990年6月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. 17 No. 6
June, 1990

单原子微波激射器中的压缩

顾 樵

(西北大学物理系, 710069)

提要: 利用 Jaynes-Cummings 模型研究单原子微波激射器中光场的量子起伏, 得到了场正交分量的方差的一般表达式。并讨论了一种常见初态的最佳压缩及其时间演化。作为例子, 详细研究了初始为热平衡分布的裸原子系统的压缩行为。

关键词: 压缩, 单原子微波激射器(OAM)

Squeezing in an one-atom maser

Gu Qiao

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an)

Abstract: The quantum fluctuation of light field induced by an one-atom maser is investigated by means of Jaynes-Cummings mode, and the general expressions for the variances of the quadrature components of the field are obtained. Optimum squeezing in a class basic states and the corresponding time evolution are demonstrated. As an example, squeezing in initial state with bare atomic system in the thermal equilibrium distribution is studied in detail.

Key words: squeezing, one-atom maser(OAM)

一、引 言

量子光学中的一个基本问题是研究单原子与单模辐射场的相互作用。这种作用中包含着许多非经典效应。以往, 这些效应的实验观察十分困难, 即无法制备这样的系统。

不久前, 西德成功地制备了展示单原子与单模场相互作用的量子辐射源。这种辐射源采用最先进的超导谐振腔(Q 值高达 10^{10}), 产生单模的微波激射。其工作物质是里德堡原子束, 它的注入速率很低, 以致任何时刻腔中最多只有一个原子。这就是所谓"单原子微波激射器" (one-atom maser, 简称 OAM)[1]。

伴随着 OAM 的出现, 有关的理论研究成为当前量子光学中引人注目的新课题。特别是, Eberly 和 Rempe 等人研究了 OAM 中的量子塌陷与复活[2,3]; Hillery 研究了 OAM 系统的光子统计, 预言了亚泊松分布的存在[4]。本文进一步研究该系统的光场起伏, 着重考虑压缩效应。

收稿日期: 1988年4月25日。

二、光场起伏

为简单起见，这里考虑二能级的OAM系统。由于它的Q值极高，腔模损耗可以忽略，从而系统的哈密顿可以用下面的Jaynes-Cummings模型[5]表示：

$$H=\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z+\hbar\omega a^+a+\hbar g(a\sigma^++a^+\sigma^-),\tag{1}$$

其中σ_z和$\sigma^\pm$分别是二能级原子的反转算符和能级升、降算符，a和a^+分别是光子的湮灭和产生算符，ω_0和ω分别是原子能级的频率间隔和单模场的频率，g是耦合劲度。

H的本征方程可以精确求解[6]，其中本征值为

$$E_n^\pm=\hbar\left[\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm\Omega_n\right],\tag{2a}$$

$$E_g=-\frac{1}{2}\hbar\omega_0;\tag{2b}$$

所属的本征态为

$$|\phi_n^\pm\rangle=\begin{pmatrix}\sin\theta_n\\\cos\theta_n\end{pmatrix}|n,\ a\rangle\pm\begin{pmatrix}\cos\theta_n\\\sin\theta_n\end{pmatrix}|n+1,\ b\rangle,\tag{3a}$$

$$|\phi_g\rangle=|0,\ b\rangle,\tag{3b}$$

式中n是光子数，a、b分别表示原子的高、低能级，而Ω_n和θ_n分别由

$$\Omega_n=\left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2(n+1)\right]^{1/2},$$

$$\mathrm{tg}\,2\theta_n=\frac{g\sqrt{n+1}}{\frac{\Delta}{2}}\quad(0\leqslant2\theta_n\leqslant\pi)$$

定义。$\Delta=\omega-\omega_0$是失谐量。

(3)式所示的本征态是正交归一完备的，即

$$\langle\phi_n^+|\phi_n^-\rangle=\langle\phi_n^-|\phi_g\rangle=\langle\phi_g|\phi_n^+\rangle=0,\tag{4a}$$

$$\langle\phi_n^+|\phi_{n'}^+\rangle=\langle\phi_n^-|\phi_{n'}^-\rangle=\delta_{nn'},\ \langle\phi_g|\phi_g\rangle=1,\tag{4b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|\phi_n^+\rangle\langle\phi_n^+|+|\phi_n^-\rangle\langle\phi_n^-|)+|\phi_g\rangle\langle\phi_g|=1。\tag{4c}$$

假定OAM系统的初态为下面的一般迭加态：

$$|\Psi(0)\rangle=\alpha_n|n,\ a\rangle+\beta_n|n+1,\ b\rangle+C_g|0,\ b\rangle,\tag{5}$$

其中α_n、β_n、C_g是复展开系数，且满足归一化条件：

$$|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2+|C_g|^2=1。\tag{6}$$

用(3)式各本征态构成的完备集将(5)式展开，即用(4c)左乘(5)式，并利用(4a)、(4b)两式，得到

$$|\Psi(0)\rangle=C_n^+|\phi_n^+\rangle+C_n^-|\phi_n^-\rangle+C_g|\phi_g\rangle,\tag{7}$$

其中

$$C_n^\pm=\alpha_n\begin{pmatrix}\sin\theta_n\\\cos\theta_n\end{pmatrix}\pm\beta_n\begin{pmatrix}\cos\theta_n\\\sin\theta_n\end{pmatrix},\tag{8}$$

(6)式所示的归一化条件转化为

$$|C_n^+|^2+|C_n^-|^2+|C_g|^2=1_{\circ} \tag{9}$$

由于 H 不含时间，则任意 t 时刻 OAM 系统的状态为

$$|\Psi(t)\rangle=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\Psi(0)\rangle_{\circ} \tag{10}$$

将(7)式代入(10)式，并利用(2)式，得到

$$|\Psi(t)\rangle=C_n^+|\phi_n^+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^+t}+C_n^-|\phi_n^-\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^-t}+C_g|\phi_g\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_gt}_{\circ} \tag{11}$$

众所周知，单模场两个正交分量 $x=a^++a, P=i(a^+-a)$ 的方差由

$$\begin{pmatrix}\langle\Delta x\rangle^2\\ \langle\Delta P\rangle^2\end{pmatrix}=1+2\langle a^+a\rangle\pm2\mathrm{Re}\langle a^2\rangle-4\begin{pmatrix}\mathrm{Re}^2\langle a\rangle\\ \mathrm{Im}^2\langle a\rangle\end{pmatrix} \tag{12}$$

表示，如果 $\langle\Delta x\rangle^2$ 和 $\langle\Delta P\rangle^2$ 之中有一个小于 1，则压缩存在。

在(11)式所示的态中算出(12)式右端的诸期待值，最后可得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\langle\Delta x(t)\rangle^2\\ \langle\Delta P(t)\rangle^2\end{pmatrix}=&\left\{1-4|C_g|^2\left[|C_n^+|\cos\theta_n\begin{pmatrix}\cos[\mu_n+(n\omega+\lambda_0+\Omega_n)t]\\ \sin[\mu_n+(n\omega+\lambda_0+\Omega_n)t]\end{pmatrix}\right.\right.\\ &\left.\left.-|C_n^-|\sin\theta_n\begin{pmatrix}\cos[\nu_n+(n\omega+\lambda_0-\Omega_n)t]\\ \sin[\nu_n+(n\omega+\lambda_0-\Omega_n)t]\end{pmatrix}\right]^2\right\}\delta_{n,0}\\ &+\{1\pm2\sqrt{2}|C_g|[|C_n^+|\cos\theta_n\cos[\mu_n+(n\omega+\lambda_1+\Omega_n)t]\\ &-|C_n^-|\sin\theta_n\cos[\nu_n+(n\omega+\lambda_1+\Omega_n)t]\}\delta_{n,1}+2\{n(|C_n^+|^2+|C_n^-|^2)\\ &+|C_n^+|^2\cos^2\theta_n+|C_n^-|^2\sin^2\theta_n-|C_n^+C_n^-|\sin2\theta_n\cos(\varepsilon_n-2\Omega_nt)]\},\end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\lambda_0=\frac{1}{2}(\omega+\omega_0), \tag{14a}$$

$$\lambda_1=\lambda_0+\omega, \tag{14b}$$

而 ε_n、μ_n 和 ν_n 由下列诸式定义：

$$C_n^+C_n^{-*}=|C_n^+C_n^-|e^{i\varepsilon_n}, \tag{15a}$$

$$C_gC_n^{+*}=|C_gC_n^+|e^{i\mu_n}, \tag{15b}$$

$$C_gC_n^{-*}=|C_gC_n^-|e^{i\nu_n}_{\circ} \tag{15c}$$

(13)式显示了以(7)式为初态的 OAM 系统的场正交分量的方差的时间演化及其对于展开系数 $C_n^\pm$、C_g、失谐量 Δ，耦合劲度 g 等参量的依赖关系。它是本文的基本结果。

三、真空场的压缩

下面具体考察初始光场为真空场($n=0$)的 OAM 系统的光场起伏。这时(13)式约化为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\langle\Delta x(t)\rangle^2\\ \langle\Delta P(t)\rangle^2\end{pmatrix}=1-4|C_g|^2&\left[|C_0^+|\cos\theta_0\begin{pmatrix}\cos[\mu_0+(\lambda_0+\Omega_0)t]\\ \sin[\mu_0+(\lambda_0+\Omega_0)t]\end{pmatrix}\right.\\ &\left.-|C_0^-|\sin\theta_0\begin{pmatrix}\cos[\nu_0+(\lambda_0-\Omega_0)t]\\ \sin[\nu_0+(\lambda_0-\Omega_0)t]\end{pmatrix}\right]^2\end{aligned}$$

$$+2\{|C_0^+|^2\cos^2\theta_0+|C_0^-|^2\sin^2\theta_0-|C_0^+C_0^-|\sin 2\theta_0\cos(\varepsilon_0-2\Omega_0 t)\}。\tag{16}$$

由(16)式可以看出，x、P 二分量的方差的时间演化行为的唯一区别是位相相差 $\pi/2$。换言之，$\mu_0=\nu_0=0$ 时 x 分量的方差与 $\mu_0=\nu_0=\pi/2$ 时 P 分量的方差呈现如下相同的形式:

$$\begin{aligned}\langle\Delta F(t)\rangle^2=&1-4|C_g|^2[|C_0^+|\cos\theta_0\cos(\lambda_0+\Omega_0)t-|C_0^-|\sin\theta_0\cos(\lambda_0-\Omega_0)t]^2\\&+2\{|C_0^+|^2\cos^2\theta_0+|C_0^-|^2\sin^2\theta_0-|C_0^+C_0^-|\sin 2\theta_0\cos 2\Omega_0 t\},\end{aligned}\tag{17}$$

这里不失一般性地选择了 $\varepsilon_0=0$。下面由(17)式出发作进一步讨论。

在初始 $t=0$ 时刻，(17)式给出

$$\langle\Delta F(0)\rangle^2=1+2(1-2|C_g|^2)(|C_0^+|\cos\theta_0-|C_0^-|\sin\theta_0)^2。\tag{18}$$

由(18)式右端小于 1 得到压缩条件为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<|C_g|<1\quad(|C_0^+|\cos\theta_0\neq|C_0^-|\sin\theta_0)。\tag{19}$$

下面讨论 $|C_0^\pm|$、$|C_g|$ 取何值时，$\langle\Delta F(0)\rangle^2$ 呈现极小值。为此对(18)式使用拉格朗日乘子法，并利用 $n=0$ 时的(9)式，最后可得最佳压缩条件:

$$|C_0^+|=\frac{1}{2}\cos\theta_0;\ |C_0^-|=\frac{1}{2}\sin\theta_0;\ |C_g|=\frac{\sqrt{3}}{2}。\tag{20}$$

将(20)式代入(18)式得到

$$\langle\Delta F(0)\rangle^2=1-\frac{1}{4}\cos^2 2\theta_0。\tag{21}$$

在共振情况下($\theta_0=\pi/4$)，得到最佳压缩量:

$$\langle\Delta F(0)\rangle^2_m=3/4。\tag{22}$$

如果初态满足(20)式的最佳压缩条件，则任意 t 时刻的方差可由(17)式给出，在共振条件下得到

$$\langle\Delta F(t)\rangle^2_m=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 gt-\frac{3}{4}\cos^2\omega t\cos^2 gt。\tag{23}$$

(23)式显示了初态最佳压缩量的时间演化。

应该指出，(23)式所示的方差是对腔内光场而言的。众所周知，在对光场的量子起伏进行腔外实际探测时，尽管使用相位灵敏探测器，也不能响应快速振荡的场频率，只能响应缓变的场包络。实际上腔外光场的量子起伏的测量是通过探测场信号与探测器本机振荡的“拍”来实现的[7]。因此对于(23)式而言，实际探测到的方差是

$$\begin{aligned}\langle\Delta F(t)\rangle^2_{md}&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 gt-\frac{3}{4}\cos^2 gt\\&=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin^2 gt。\end{aligned}\tag{24}$$

这个时间演化呈现 Rabi 振荡的特征，振荡幅度在 3/4 和 1 之间。

四、一 个 例 子

现在利用上述结果，对于实验上常见的一种初态——“裸原子系统”(原子处于高、低能级均有一定的几率，而光场是真空场)，讨论其压缩效应。这时归一化的初态可以写为

$$|\Psi(0)\rangle=\sqrt{P_a}\;|0,\,a\rangle+\sqrt{P_b}\,|0,\,b\rangle,\tag{25}$$

式中 P_a、P_b 分别是原子处于高、低能级的几率。利用(3)式将(25)式改写成下面的形式:

$$|\Psi(0)\rangle=\sqrt{P_a}\;\sin\theta_0\,|\phi_0^+\rangle+\sqrt{P_a}\;\cos\theta_0\,|\phi_0^-\rangle+\sqrt{P_b}\,|\phi_g\rangle。\tag{26}$$

(26)式与(7)式比较得到展开系数:

$$C_0^+=\sqrt{P_a}\sin\theta_0,\;C_0^-=\sqrt{P_a}\cos\theta_0,\;C_g=\sqrt{P_b}。\tag{27}$$

从(27)式出发,利用(19)式可得(25)式初态的压缩条件:

$$P_a<P_b;\tag{28}$$

利用(20)式及共振条件可得初态的最佳压缩条件:

$$P_a/P_b=1/3。\tag{29}$$

在(29)式的条件下,任意 t 时刻腔内光场的压缩行为由(23)式描述,而腔外探测到的方差则呈现(24)式的 Rabi 振荡。

作为本文的结束,需要说明利用 OAM 系统产生压缩光辐射的实验设想。目前的 OAM 系统采用的是初始完全反转的原子束(初始光场为真空场)。(28)式表明,这样不可能产生压缩。根据上文的分析,我们建议直接采用几率比满足

$$P_a/P_b=\exp(-h\nu_0/KT)=1/3\tag{30}$$

的热平衡态原子束,其中 ν_0 是原子的跃迁频率,T 是原子束的绝对温度,K 是玻尔兹曼常数。

下面以不久前观察到量子塌陷与复活现象的 OAM 系统[3]为例,估算注入原子束的温度。设工作物质为 ^{85}Rb 原子束,微波激射发生在 $63P_{3/2}\to 61d_{5/2}$ 的两能级之间,跃迁频率为

$$\nu_0=21456.0\,\mathrm{MHz}。\tag{31}$$

将(31)式代入(30)式得到

$$T\approx1.1\mathrm{K}。\tag{32}$$

这个温度对于目前的 OAM 系统是不难实现的。在实验中,将所注入的 $^{85}\mathrm{Rb}$ 原子束控制在这一温度附近,并调节微波腔使之与 $^{85}\mathrm{Rb}$ 原子的 $63P_{3/2}\to61d_{5/2}$ 的跃迁发生共振,并在腔外探测场信号与探测器本机振荡的"拍"信号,也许可能观察到方差呈现周期性的 Rabi 振荡的压缩光辐射。

参 考 文 献

1 Meschede D. *et al*. *Phys. Rev. Lett.*, **54**(6), 551(1985)
2 Eberly J. H. *et al.*, *Phys. Rep.*, **118**(5), 241(1985)
3 Rempe G. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(4), 353(1987)
4 Hillery M., *Phys. Rev. A*, **35**(10), 4186(1887)
5 顾樵,物理学报,**37**(5), 751(1988)
6 顾樵,中国激光,**15**(8), 487(1988)
7 Slusher R. E. *et al.*, *J. Opt. Soc. Am., B*. **4**(10), 1453(1987)