

偏振剪切相机直接测量曲率和扭率

顾杰

(苏州大学物理系)

提要: 本文提出一种新的剪切相机,它可同时记录三个或四个错位的像。用相干光照明该剪切干涉系统可直接测量试件的二阶位移导数。

关键词: 偏振剪切相机,二阶混合偏导数,扭率

Polarized image-shearing camera for direct measurement of curvature and torsion

Gu Jie

(Department of Physics, Suzhou University, Suzhou)

Abstract: This paper describes a new image-shearing camera which focuses three or four laterally sheared image at the film plane. With coherent illumination, this camera becomes a shearing interferometer which can directly measures the second order derivatives of surface displacement.

Key words: polarized image-shearing camera, the second order derivatives, torsion

一、引言

剪切干涉术通过两个一阶条纹的错位迭加产生的云纹来获得二阶条纹信息。一种方法用两张完全相同的一阶条纹明片机械错位迭合来产生二阶条纹^[1]。另一种方法通过四次曝光将两错位的斜率条纹记录在散斑图上,滤波后取得二阶信息。但都比较麻烦。Mohanty等^[2]提出了三分透镜法,Sharma等^[3]给出了三孔剪切相机法。这两种方法只需双曝光,并能同时得到一阶和二阶条纹,但是散斑衍射晕的能量较分散,影响了条纹的质量。本文建议的方法也只需双曝光,但专门用于获得二阶条纹,且衍射晕能量集中,条纹质量较高。

二、差分原理

剪切散斑术中错位的数学意义就是用有限差分近似代替微分。见图1,为求二阶偏导数将位移 W 在 x_2 附近作泰勒展开,略去三次以上项得到

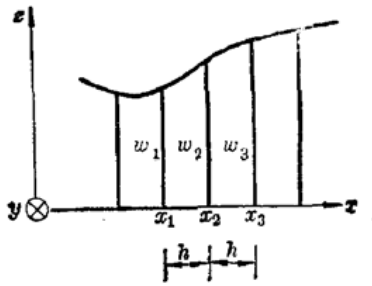


图 1 差分法计算斜率和曲率

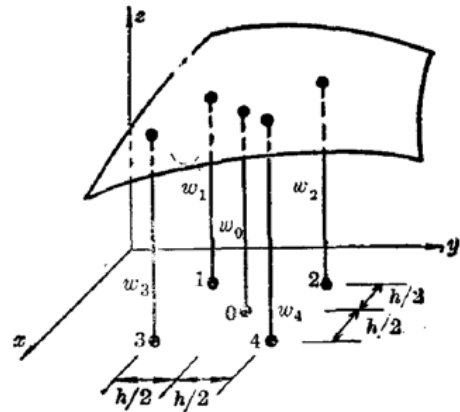


图 2 差分法计算斜率和扭率

$$\begin{cases} w_1 = w_2 - \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h^2 \\ w_3 = w_2 + \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h^2 \end{cases} \quad (1)$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_3 - w_1}{2h^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{h^2} \end{cases} \quad (2)$$

为求混合偏导数, 将位移 W 在 0 点处展开(图 2), 略去高阶项后得

$$\begin{cases} w_1 = w_0 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{h}{2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{h^2}{4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{h^2}{4} \\ w_2 = w_0 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{h^2}{4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{h^2}{4} \\ w_3 = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{h}{2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{h^2}{4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{h^2}{4} \\ w_4 = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{h^2}{4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{h^2}{4} \end{cases} \quad (3)$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_4 + w_3 - w_2 - w_1}{2h} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{w_4 - w_3 - w_2 + w_1}{h^2} \end{cases} \quad (4)$$

三、剪切相机

3.1 曲率相机

有两种方法可以获得二阶偏导数条纹。

(1) 离焦型 如图 3, 开四个圆孔, 在其上布置偏振片, 使 A 孔对的偏振方向与 B 孔对的偏振方向相互垂直。再在 B 孔对上设两个一样的玻璃楔片, 右图中箭头表示楔片倾斜方向。取适当的离焦量, 令激光的偏振方向与偏振片的方向成 45° 角, 对变形前后的物体双曝光。 O_1

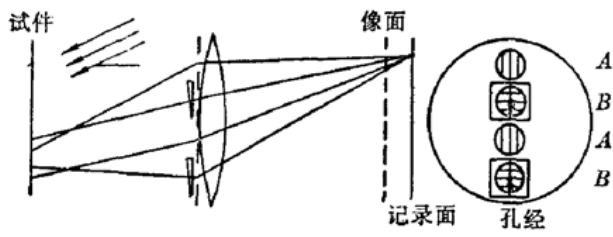


图3 离焦型曲率相机

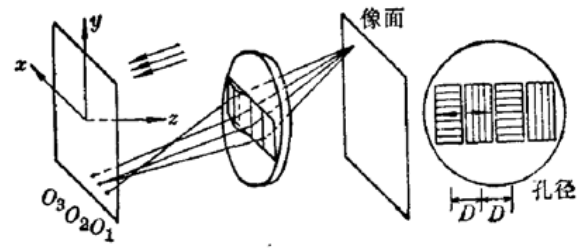


图4 光楔型曲率相机

和 O_2 两物点在记录面上重合,通过 A 孔对记录到一组一阶条纹。同样,通过 B 孔对得到一组一样的条纹。由于 B 孔对上的光楔,两组条纹有一错位。文献[4]指出偏振方向相互垂直的孔径之间互不相干,因此 A 孔对和 B 孔对互相独立,散斑图的复透率是两者强度的迭加。 A 孔对和 B 孔对产生的衍射晕完全重合(都是三晕块分布),故可在同一晕区中滤得两个错位的一阶条纹。离焦型的缺点是若要提高条纹质量,要求缩小孔径尺度,曝光时间较长;为了得到较密的一阶条纹,需要大的离焦量,条纹清晰度受到影响。

(2) 光楔型 如图4,这种安排的孔可开得大一些。分析双曝光散斑图,衍射晕分布图中只有 -1 级、 0 级和 $+1$ 级,在 1 级晕块上滤波可得到高质量的曲率条纹。

3.2 扭率相机

与曲率相机类似,也可有两种不同的方案。

(1) 离焦型 见图5。

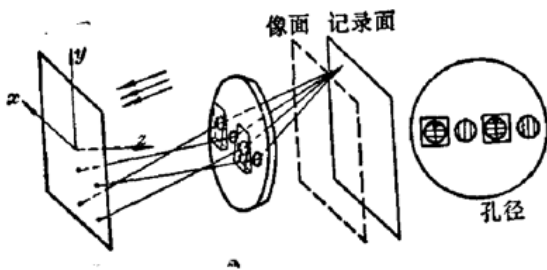


图5 离焦型扭率相机

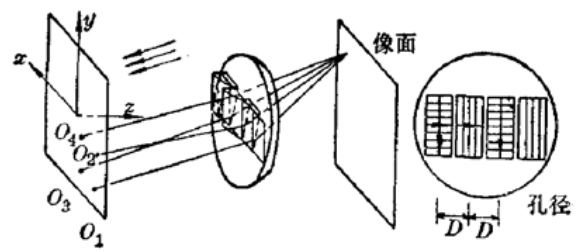


图6 光楔型扭率相机

(2) 光楔型 见图6,这种方案较好。可在一级晕块上滤波得到混合偏导数。

3.3 组合相机

若使孔径安排得复杂一些,可在同一张散斑图上得到更多的信息。在相机前放上图7(a)

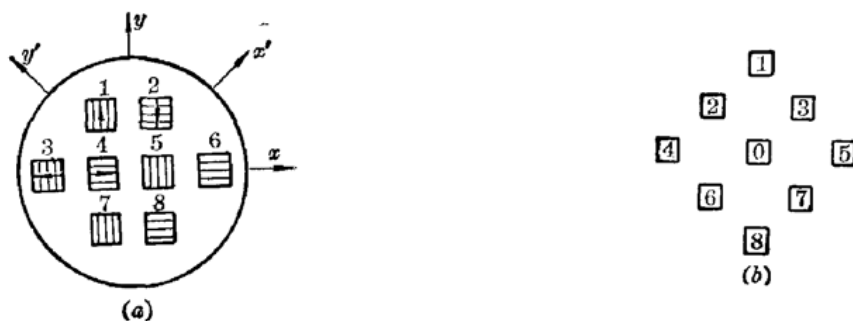


图7 组合相机。(a)孔径;(d)衍射晕

所示的孔径,所得散斑图的衍射晕见图 7(b)。3-4-5-6 孔构成 x -方向的曲率相机,有用信息在 4 和 5 晕块中。1-2-7-8 孔构成 y 方向的曲率相机,信息在 1 和 8 晕块中。1-3 孔和 2-4 孔各产生一个沿 x' 方向剪切的一阶条纹,它们之间沿 y' 方向有错位,得到 $x'y'$ 方向的二阶混合偏导数条纹,信息在 3 和 6 晕块中。5-7 孔和 6-8 孔不产生有用信息,但产生的晕也在 3 和 6 晕区中,造成均匀背景,故扭率条纹对比度较差。2 和 7 晕块中没有有用信息。

这种孔径能同时获得两个方向的曲率,但因晕能量分散,条纹清晰度比曲率相机得到的条纹差一些。

四、原 理

物面剪切量为

$$h = p(n-1)\alpha \quad (5)$$

式中 p 是物距, n 是光楔折射率, α 是楔角。下面仅对图 4 和图 7 系统作出较完整的讨论。

4.1 二阶偏导数

由图 4 可见,物点 O_1 、 O_2 和 O_3 对同一像点的光强有贡献。变形前像点的复振幅为

$$\begin{aligned} U_{T1} &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &= Ae^{i(\phi_1 + \delta_1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Ae^{i(\phi_2 - \delta_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Ae^{i(\phi_3 + \delta_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

式中的矩阵是琼斯矩阵; ϕ 是随机位相; $\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} x_t \frac{D}{q}$, 式中 λ 是光波长, q 是像距。

$$U_{T1} = A \begin{bmatrix} e^{i(\phi_1 + \delta_0)} + e^{i(\phi_2 - \delta_0)} \\ e^{i(\phi_2 - \delta_0)} + e^{i(\phi_3 + \delta_0)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

光强

$$\begin{aligned} I_1 &= U_{T1}^+ U_{T1} \\ &= A^2 [4 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2 + 2\delta_0) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + 2\delta_0)] \end{aligned} \quad (8)$$

式中 U_{T1}^+ 是 U_{T1} 的厄密矩阵。类似地,变形后有

$$I_2 = A^2 [4 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2 + 2\delta_0 + \delta_1 - \delta_2) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + 2\delta_0 + \delta_3 - \delta_2)] \quad (9)$$

式中 δ_1 、 δ_2 和 δ_3 是变形引起的位相差。双曝光强度

$$I = I_1 + I_2 \quad (10)$$

滤波时让一级晕块通过,分析系统像面光强为

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{c}{4} |e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{i(\phi_3 - \phi_2)} + e^{i(\phi_1 - \phi_2 + \delta_1 - \delta_2)} + e^{i(\phi_3 - \phi_2 + \delta_3 - \delta_2)}|^2 \\ &= c \left[1 + \cos \frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \cos \frac{\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3}{2} + \cos \left(\phi_{13} + \frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \right) \cos \frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\phi_{13} + \frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \right) \cos \frac{\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3}{2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\phi_{13} = \phi_1 - \phi_3$ 是随机位相, c 是常数, 式中^[8]

$$\delta_1 - \delta_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \left[\frac{u_1 - u_3}{2h} 2h \sin \theta + \frac{w_1 - w_3}{2h} 2h (1 + \cos \theta) \right] - \frac{2p}{p} u_2 \right\} \quad (12)$$

式中 θ 是入射光与 z 轴的夹角(设光的波矢量在 xz 平面内)。将(2)式代入得

$$\delta_1 - \delta_3 = \frac{4\pi}{\lambda} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} h \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial x} h (1 + \cos \theta) \right] - \frac{D}{p} u_0 \right\} \quad (13)$$

式中 u, v 和 w 分别是 x, y 和 z 方向的位移, 类似地, 可得

$$\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 \sin \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h^2 (1 + \cos \theta) \right] \quad (14)$$

从(13)、(14)式可知, (11)式表示一阶条纹错位迭加产生的二阶条纹。

4.2 二阶偏混合导数

图7中, 变形前像点复振幅为

$$U_{T1} = A \begin{bmatrix} e^{i(\phi_1 - \delta_0)} + e^{i(\phi_3 + \delta_0)} \\ e^{i(\phi_2 - \delta_0)} + e^{i(\phi_4 + \delta_0)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

像点光强:

$$I_1 = U_{T1}^+ U_{T1} = A^2 [4 + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2\delta_0) + 2 \cos(\phi_4 - \phi_2 + 2\delta_0)] \quad (16)$$

变形后像点光强:

$$I_2 = A^2 [4 + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2\delta_0 + \delta_3 - \delta_1) + 2 \cos(\phi_4 - \phi_2 + 2\delta_0 + \delta_4 - \delta_2)] \quad (17)$$

双曝光强度为(10)式, 滤波时取一级晕块, 则分析系统像面光强为

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{c}{4} |e^{i(\phi_4 - \phi_1)} + e^{i(\phi_4 - \phi_2)} + e^{i(\phi_3 - \phi_1 + \delta_3 - \delta_1)} + e^{i(\phi_4 - \phi_2 + \delta_4 - \delta_2)}|^2 \\ &= c \left[1 + \cos \frac{\delta_4 + \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1}{2} \right. \\ &\quad + \cos \left(\phi_{42} - \phi_{31} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1}{2} \right) \cos \frac{\delta_4 + \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{2} \\ &\quad \left. + \cos \left(\phi_{42} - \phi_{31} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1}{2} \right) \cos \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1}{2} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

式中 $\phi_{42} = \phi_4 - \phi_2$, $\phi_{31} = \phi_3 - \phi_1$ 。由文献[3], 并运用(4)式我们得到

$$\delta_4 + \delta_3 - \delta_2 - \delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} h \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial x} h (1 + \cos \theta) \right] - \frac{D}{q} u_0 \right\} \quad (19)$$

$$\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1 = \frac{2\pi h^2}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 + \cos \theta) \right] \quad (20)$$

可见(18)式表示由一阶条纹错位迭合产生的二阶混合偏导数条纹。

五、实 验

薄板法向受载时, 面内位移可以忽略, 这时(13)、(14)、(19)、(20)式简化为

$$\delta_1 - \delta_3 = \frac{4\pi h}{\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (21)$$

$$\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = \frac{2\pi h^2}{\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (22)$$

$$\delta_4 + \delta_3 - \delta_2 - \delta_1 = \frac{4\pi h}{\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (23)$$

$$\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1 = \frac{2\pi h^2}{\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (24)$$

(下转第295页)

冲有两只峰且存在是由随机涨落所引起的可能性^[4], 而图 6(c) 则给出前向光脉冲的具体形状, 且测量误差和分辨率均在 0.7 ps 之内。前后光脉冲中的小峰应为喇曼池反射所形成, 二峰间距(9 ps)与泵浦光会焦于距池输入端 1 mm 相一致。

四、讨 论

在修正因子 β 的计算及实验中, 我们均视 ps 的尺度上光脉冲为高斯型^[5], 作为更一般的考虑, 我们认为作为取样的脉冲形状对于所测得的光脉冲的形状无影响, 只涉及到精确度, 而对脉宽的测量, 在 τ_1 比 τ_2 要小得多时也没有大的影响, 只有当 τ_1 接近于 τ_2 时, 需根据取样脉冲的具体形状, 找到正确的修正因子 β 以完成脉宽及形状的同时测量。

总之, 这种方法的准确度取决于取样脉冲的宽度及其待测脉冲的宽度比, 要寻找一种与待测光脉冲波长相配, 且脉宽窄的取样脉冲也是比较困难的, 很幸运的是波长可调的 ps 超短腔染料激光器^[6]的出现, 及其目前已发展到输出亚 ps 的可调谐激光, 这就为我们选取取样脉冲提供了很大便利, 虽然它仍受到取样脉冲稳定性的影响, 但这种利用 SHG 的非共线、无本底相关测量脉冲形状和宽度的方法, 在 ps 尺度上显露其价值。

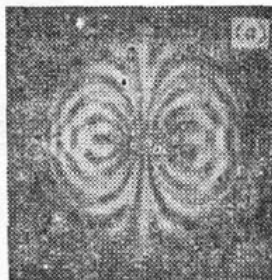
参 考 文 献

- 1 刘一先, 中国激光, **14**(1), 5(1987)
- 2 E. P. Ippen, *Appl. Phys. Lett.*, **27**(9), 488(1975)
- 3 A. W. Smith, *Appl. Phys. Lett.*, **17**(8), 340(1970)
- 4 H. E. Rowe, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-6**(1), 49(1970)
- 5 R. C. Eckard, *Appl. Phys. Lett.*, **15**(12), 425(1969)
- 6 刘一先, 中国激光, **14**(3), 141(1987)

(上接第300页)

(22)式给出曲率, (24)式给出扭率。

取一厚 0.5 mm, 直径 75 mm 的圆形铝板, 表面涂金粉, 周边固定, 中心加集中力。用 20 mW 的氮-氦激光器作照明光源, 光楔角度 20' 透镜焦距 $f=240$ mm, 圆板中心挠度为 10 μ m。用图 4 光路双曝光记录散图斑, 滤波分析时取一级晕块得图 8(a) 所示曲率条纹。用图 6 光路记录散斑图, 滤波得图 8(b) 所示扭率条纹。



(a)曲率条纹



(b)扭率条纹

图 8

参 考 文 献

- 1 Y. Y. Huang *et al.*, *Appl. Opt.*, **18**(7), 1046(1979)
- 2 R. K. Mohanty *et al.*, *Appl. Opt.*, **23**(24), 4596(1984)
- 3 D. K. Sharma *et al.*, *Appl. Opt.*, **23**(10), 1542(1984)