

## 抛物型发散梯度折射率纤维透镜的光线传播 和近轴成像特性

廖廷佛

(福建师范大学激光所, 福州)

**摘要:** 本文从光线方程出发, 讨论一种抛物型发散梯度折射率纤维透镜的光线传播和近轴成像特性, 导出光线在纤维透镜中传播轨迹的解析解, 并给出纤维透镜的等效焦距、主平面和焦平面位置的计算公式, 以及近轴成像公式。

**关键词:** 梯度折射率, 纤维透镜, 光线传播

### Light ray propagation and paraxial imaging characteristics of parabolic defocusing GRIN fiber lenses

Liao Tingdi

(Institute of Laser, Fujian Normal University, Fuzhou)

**Abstract:** In this paper we discuss the light ray propagation and paraxial imaging characteristics of a parabolic defocusing GRIN fiber lens based on the ray equation. The analytical solutions are found for the ray paths propagating in a parabolic defocusing GRIN fiber lens and used to derive the GRIN lens law. The equivalent focal length and the principal planes are determined.

**Key words:** gradient index, fiber lens, light ray propagation

### 一、引言

近年来, 梯度折射率纤维透镜的研究十分活跃<sup>[1]</sup>。O. Gomez-Reino 等人<sup>[2, 3]</sup>对若干梯度折射率纤维透镜的近轴成像、傅里叶变换和模式传播等问题进行了深入探讨。然而, 他们研究的均为聚焦型纤维透镜, 其折射率沿径向递减; 对折射率沿径向递增的发散型纤维透镜却很少关注<sup>[4~7]</sup>。关于柱形和锥形发散梯度折射率纤维透镜的成像特性, 文献[6]和[7]已有探讨。本文研究一种抛物型发散梯度折射率纤维透镜的光线传播和近轴成像特性。导出光线在纤维透镜中传播轨迹的解析解, 并给出纤维透镜的等效焦距、主面、焦面位置计算公式以及近轴成像公式。

收稿日期: 1988年6月8日。

\* 福建省自然科学基金资助项目。

## 二、抛物型发散纤维透镜的光线传播特性

考虑一抛物型发散梯度折射率纤维透镜, 厚度为  $d$ , 两平面端面分别位于坐标  $z$  轴上在  $z=0$  和  $z=d$  处。如取直角坐标  $(x, y, z)$ , 且  $z$  轴与纤维光轴重合, 则发散纤维的折射率分布为<sup>[7]</sup>

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 + g^2(z) (x^2 + y^2)] \quad (1)$$

其中  $n_0$  为纤维轴中心处的折射率,  $g(z)$  为纤维沿  $z$  轴的梯度参数

$$g(z) = g_0 / [1 - (z/L)^2] \quad (2)$$

式中  $g_0 = g(0)$ 。式(1)、(2)表明纤维的等折射率面呈抛物线型变化, 其顶点相对  $z$  轴对称地位于  $x$  (或  $y$ ) 轴上, 且在  $z$  轴上有公共点  $z = \pm L$ 。如图 1 所示。

在近轴条件下, 计及方程(1), 抛物型发散梯度折射率纤维的光线方程为

$$\ddot{H}(z) - g^2(z) H(z) = 0 \quad (3) \quad \text{图 1 抛物型发散梯度折射率纤维透镜}$$

式中  $H(z) = x(z)$  或  $y(z)$ ,  $\ddot{H}(z) = \frac{d^2 H}{dz^2}$ 。光线的初始条件为

$$H(0) = H_0 \quad (4 \cdot a)$$

$$n_0 \dot{H}(0) = n_0 P_0 \quad (4 \cdot b)$$

为求解方程(3), 引进如下参变量

$$\sin t = z/L \quad \text{或} \quad t = \sin^{-1}(z/L) \quad (5)$$

从式(5)和(2)得

$$dt/dz = 1/L \cos t \quad (6)$$

$$g(z) = g_0 / \cos^2 t \quad (7)$$

再计及

$$\dot{H}(z) = H'(t) / L \cos t \quad (8)$$

$$\ddot{H}(z) = \frac{1}{L^2 \cos^2 t} [H''(t) - \operatorname{tg} t H'(t)] \quad (9)$$

方程(3)可化为

$$H''(t) + \operatorname{tg} t H'(t) - (g_0 L)^2 \sec^2 t H(t) = 0 \quad (10)$$

式中  $H'(t) = dH/dt$ ,  $H''(t) = d^2 H/dt^2$ 。再依次作如下函数和变量替换

$$H(t) = \cos t W(t) \quad (11)$$

$$\xi(t) = b \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) \quad (12)$$

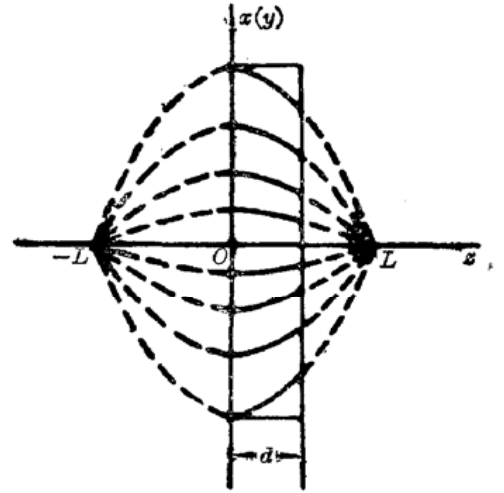
其中  $b$  为

$$b^2 = g_0^2 L^2 + 1 \quad (13)$$

可求得方程(10)的通解

$$H(t) = A \cos t \operatorname{sh}^* \xi(t) + B \cos t \operatorname{ch} \xi(t) \quad (14)$$

式中  $A, B$  为两个由光线初始条件(4)确定的常数。将(13)代入(4·a)、(4·b)式求得光线轨迹



方程

$$H(z) = H_0 \cos t(z) \operatorname{ch} \xi(z) + \frac{L}{b} \cos t(z) \operatorname{sh} \xi(z) P_0 \quad (15)$$

和斜率方程

$$\begin{aligned} \dot{H}(z) = & \frac{1}{L \cos t(z)} \cdot [b \operatorname{sh} \xi(z) - \sin t(z) \operatorname{ch} \xi(z)] H_0 \\ & + \frac{P_0}{b \cos t(z)} \cdot [b \operatorname{ch} \xi(z) - \sin t(z) \operatorname{sh} \xi(z)] \end{aligned} \quad (16)$$

式中  $\xi(z)$  为

$$\xi(z) = b \ln(\sec t(z) + \operatorname{tg} t(z)) = \frac{1}{2} b \ln \frac{L+z}{L-z} \quad (17)$$

方程(15)、(16)可表示为如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} H(z) \\ n_0 \dot{H}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2(z) & \frac{H_1(z)}{n_0} \\ n_0 \dot{H}_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ n_0 P_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中  $H_1$ 、 $H_2$  及  $\dot{H}_1$ 、 $\dot{H}_2$  为

$$H_1(z) = \frac{L}{b} \cos t(z) \operatorname{sh} \xi(z) \quad (19)$$

$$\dot{H}_1(z) = \frac{1}{b \cos t(z)} [b \operatorname{ch} \xi(z) - \sin t(z) \operatorname{sh} \xi(z)] \quad (20)$$

$$H_2(z) = \cos t(z) \operatorname{ch} \xi(z) \quad (21)$$

$$\dot{H}_2(z) = \frac{1}{L \cos t(z)} [b \operatorname{sh} \xi(z) - \sin t(z) \operatorname{ch} \xi(z)] \quad (22)$$

且它们满足如下恒等式

$$\dot{H}_1(z) H_2(z) - H_1(z) \dot{H}_2(z) = 1 \quad (23)$$

显然, 方程(19)、(20)和(21)、(22)分别描述两条初始条件为

$$H_1(0) = 0, \quad \dot{H}_1(0) = 1 \quad (24a)$$

和

$$H_2(0) = 1, \quad \dot{H}_2(0) = 0 \quad (24b)$$

的特定光线  $I$  和  $II$  在纤维中的传播轨迹。其中光线  $I$ , 在端面轴中心以一倾角入射, 它在纤维中的传播由方程(19)、(20)描述; 光线  $II$ , 平行于光轴入射, 在纤维中的传播由方程(21)、(22)描述。图 2(a)、(b) 给出了光线  $I$ 、 $II$  在抛物型发散梯度折射率纤维中的传播轨迹。

由图 2 可知, 光线轨迹随着  $z$  增大而迅速向边缘发散, 可以预见, 纤维中部分光线随着传播距离的增加很快发散到纤维边缘而逸出。光线发散到纤维边缘时的纤维长度即为纤维的有效长度。对半径为  $r$  的抛物型发散纤维, 任意光线的有效长度可由下式求得:

$$\cos t(z) \left[ \operatorname{ch} \xi(z) H_0 + \left( \frac{L}{b} \operatorname{sh} \xi(z) \right) P_0 \right] = r \quad (25)$$

用数值法解超越方程(25)即可得有效长度  $z = de$ 。用于成像的光线必须能到达像空间, 相应的纤维有效长度  $de$  应大于纤维的厚度  $d$ 。因此, 成像光束的大小受到一定限制。

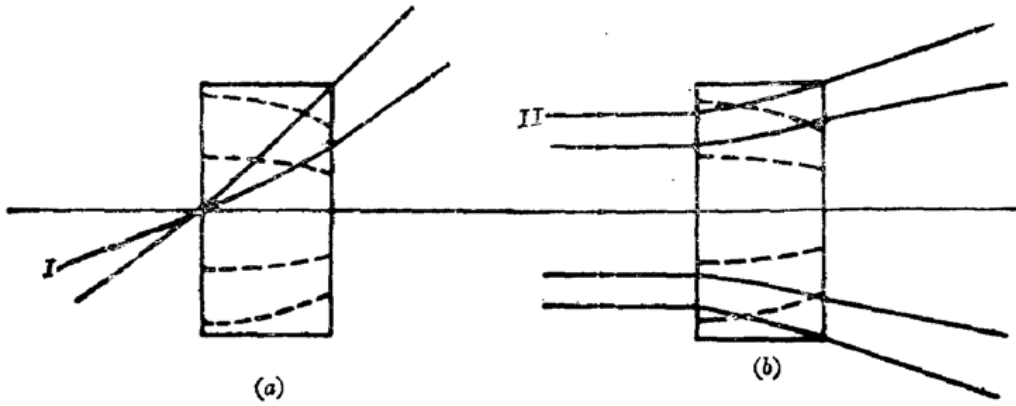


图2 抛物型发散纤维中的光线轨迹

### 三、抛物型发散纤维透镜的成像特性

设物体  $AB$  位于入射端面前  $l_0$  处, 经纤维所成的像  $A'B'$  位于距出射端面  $l'_0$  处(图3)。如果  $r_1, r_2$  和  $\dot{r}_1, \dot{r}_2$  分别表示光线在物面、像面上的位置和倾角, 则成像系统可用于如下矩阵表示:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_2 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & l'_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 & \frac{H_1}{n_0} \\ n_0 \dot{H}_2 & \dot{H}_1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & -l_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_2 + n_0 l'_0 \dot{H}_2 & \frac{H_1}{n_0} + l'_0 \dot{H}_1 - l_0 H_2 - n_0 l_0 l'_0 \dot{H}_2 \\ n_0 \dot{H}_2 & \dot{H}_1 - n_0 l_0 \dot{H}_2 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

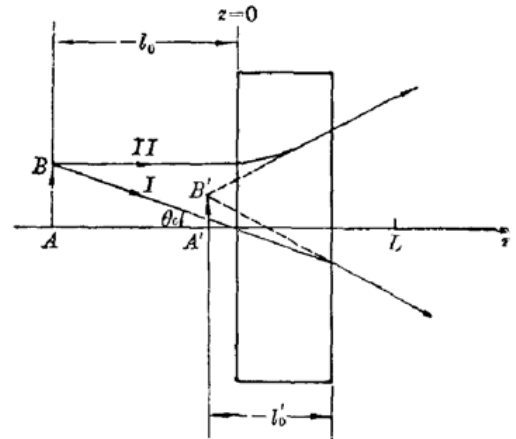


图3 抛物型发散纤维的成像原理

由成像条件  $r_2 \equiv \beta r_1$  求得物像关系式和像的放大率  $\beta$ :

$$l'_0 = \frac{n_0 l_0 H_2(z) - H_1(z)}{n_0 [\dot{H}_1(z) - n_0 l_0 \dot{H}_2(z)]} \quad (27)$$

$$\beta = \frac{1}{\dot{H}_1(z) - n_0 l_0 \dot{H}_2(z)} \quad (28)$$

将(19)~(22)代入(27)、(28)式得

$$l'_0 = \frac{\cos^2 t(z) \left[ n_0 l_0 \operatorname{ch} \xi(z) - \frac{L}{b} \operatorname{sh} \xi(z) \right]}{n_0 \left\{ \left[ \operatorname{ch} \xi(z) - \frac{1}{b} \sin t(z) \operatorname{sh} \xi(z) \right] - n_0 l_0 \frac{b}{L} \left[ \operatorname{sh} \xi(z) - \frac{1}{b} \sin t(z) \operatorname{ch} \xi(z) \right] \right\}} \quad (29)$$

$$\beta = \cos t(z) \left\{ \left[ \operatorname{ch} \xi(z) - \frac{1}{b} \sin t(z) \operatorname{sh} \xi(z) \right] - n_0 l_0 \frac{b}{L} \left[ \operatorname{sh} \xi(z) - \frac{1}{b} \sin t(z) \operatorname{ch} \xi(z) \right] \right\}^{-1} \quad (30)$$

当  $l'_0 > 0$  时成实像,  $l'_0 < 0$  时成虚像;  $\beta > 0$  为正立像,  $\beta < 0$  为倒立像;  $|\beta| > 1$  为放大像,  $|\beta| < 1$  为缩小像。由(29)式, 令  $l_0 \rightarrow \infty$  得成像在无限远的物距, 即物方焦点位置, 则

$$l_f = \frac{L}{n_0 b} \cdot \frac{\sin t \operatorname{sh} \xi - b \operatorname{ch} \xi}{\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi} \quad (31)$$

由(30)式, 令  $\beta=1$  得成像在像方主面的物距, 即物方主面位置:

$$l_h = \frac{L}{n_0 b} \cdot \frac{\sin t \operatorname{sh} \xi - b \operatorname{ch} \xi + b \cos t}{\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi} \quad (32)$$

所以, 物方焦距为

$$f = l_f - l_h = -\frac{L \cos t}{n_0 (\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi)} \quad (33)$$

由(29)式, 令  $l_0 \rightarrow \infty$  得像方焦点位置

$$l'_f = \frac{L \cos^2 t \operatorname{ch} \xi}{n_0 (\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi)} \quad (34)$$

将  $l_0 = l_h$  代入(29)得像方主面位置

$$l'_h = \frac{L \cos t}{n_0 b} \cdot \frac{\cos t \operatorname{ch} \xi - 1}{\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi} \quad (35)$$

因此, 像方焦距为

$$f' = l'_f - l'_h = \frac{L \cos t}{n_0 (\sin t \operatorname{ch} \xi - b \operatorname{sh} \xi)} = -f \quad (36)$$

对于给定厚度  $d$  的纤维, 上述各式中

$$z = b, \quad \sin t = \frac{d}{L}, \quad \cos t = \left(1 - \frac{d^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \frac{1}{2} b \ln \frac{L+d}{L-d}.$$

若物距和像距以主面为基准计算, 即

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 - l_h \\ l' &= l'_0 - l'_h \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

则物像关系式(29)可化为如下高斯公式

$$1/l' - 1/l = 1/f' \quad (38)$$

#### 四、结 论

本文研究了一种抛物型发散梯度折射率纤维透镜的光线传播和近轴成像特性。由光线微分方程, 导出纤维中光线轨迹的解析解。并给出了透镜的等效焦距、主平面、焦平面位置计算公式, 以及纤维的近轴成像公式。结果表明, 此种纤维透镜的作用相当于常规的发散透镜。

作者诚挚感谢邱锦辉先生对本工作的支持和帮助。

#### 参 考 文 献

- 1 E. W. Marchand, *Appl. Opt.*, **25**(19), 3395(1986)
- 2 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(19), 3418(1986)
- 3 程希望, *光学学报*, **7**(12), 1133(1987)
- 4 Y. Ohtsuka *et al.*, *Appl. Opt.*, **20**(20), 3562(1981)
- 5 Aruna Rohra, *Appl. Opt.*, **22**(19), 3058(1983)
- 6 殷宗敏, *激光*, **9**(2), 65(1982)
- 7 廖廷倬, *中国激光*, **16**(15), 267~271(1989)