

ABCD 定律的推广

邓锡铭 丁丽明 叶陈春

(中国科学院上海光机所高功率激光物理实验室)

提要: 高斯光束的传输可用 $ABCD$ 定律来描述^[1]。本文利用光束传输流体模型理论讨论了任意傍轴光束的传输,从而获得推广了的 $ABCD$ 定律。

关键词: $ABCD$ 定律, 流体模型, 傍轴光束

Generalization of $ABCD$ law

Deng Ximing, Ding Liming, Ye Chenchun

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

Abstract: The transmission of a Gaussian beam can be described by $ABCD$ law^[1]. In this paper, a generalized $ABCD$ law has been derived using the theory of hydrodynamic model^[2,3], which can be used to describe the transmission of a paraxial light beam.

Key words: $ABCD$ law, hydrodynamic model, paraxial light beam

引 言

几何光学是光束传输的一种近似描写,它忽略了衍射对光束传输的影响,极其简单,只需一个参数 R ,即垂直于光线的波面的曲率半径来描述。高斯公式为

$$1/s + 1/s' = 1/f \quad (0-1)$$

式中的物距 s 、像距 s' 就是这个参数 R 。

考虑衍射效应在内的光束传输的描写,有所谓 $ABCD$ 定律^[1],它采用一个复参数 q 来描写,但仅限于描写高斯光束的传输,即

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{K\sigma^2} \quad (0-2)$$

式中 R 是高斯光束等相位面的曲率半径, σ 是束宽。

对于一般光束的传输,能否建立类似的表达式?这是本文探讨的目标。我们试图推广 $ABCD$ 定律,使之适用于描写一般傍轴光束的传输。本文的结果将表明,同样可以建立一个复参数 Q ,它由三个实参量组成,而不是两个。这里采用了由我们自己建立的流体模型理论方法^[2,3],导致物理图像清晰、推导简明。

一、光束传输的三个区段

这里涉及的是傍轴光束。它可以具有任意的非均匀的振幅分布和位相分布，即等位相面不一定是球面。光束从焦平面开始向无限远处发散传输，依衍射的相对强弱，可分为以下三个区段：

1. 远场区段：在这个区段里，光束的每个横截面都是典型的远场振幅花样，波面是球面，其曲率半径等于从焦面到截面的距离 Z ，没有衍射效应，可以用几何光学描写。从流体模型理论角度看，这个区段每个截面的内禀能量趋于 0。这个区段远离焦平面，菲涅耳数逼近 0。

2. 近场区段：在这个区段里，光束的每个横截面都是近场花样，波面一般不是球面，即使近似为球面，其曲率半径与截面位置坐标 Z 也相差甚远。衍射效应相对强烈，用几何光学描写会产生很大的偏离。从流体模型理论的角度看，这个区段内光束截面的内禀能量占去内能的很大一部分。光束焦平面附近的焦深区就是近场区段的典型区域。

3. 准远场区段：这是近场区与远场区之间的一个区段。光束截面的振幅分布接近远场花样。波面接近球面，但其曲率半径与截面位置坐标 Z 有明显差别。衍射效应虽比近场区段弱得多，但仍不能忽略。几何光学描述与实际传输情况有差别。从流体模型理论看，在这个区段，光束截面的内禀能量只占内能的一小部分。

以高斯光束为例，划分三个区段，高斯光束的波面曲率半径 R 等于

$$R = (K^2\sigma_0^4 + 4Z^2)/4Z \quad (1-1)$$

式中 $K = 2\pi/\lambda$ ； σ_0 为光腰半径； Z 为光束截面至光腰截面（焦平面）的距离。则有：

$$\frac{K\sigma_0^2}{2} / Z \rightarrow 0 \text{ 为远场区段；}$$

$$\frac{K\sigma_0^2}{2} / Z \geq 1 \text{ 为典型的近场区段；}$$

$$\frac{K\sigma_0^2}{2} / Z \ll 1 \text{ 为准远场区段。}$$

即在远场区段， $R = Z$ ；在准远场区段， $(R - Z)/Z \ll 1$ ；在近场区段， $(R - Z)/Z \geq 1$ 。

二、光束传输流体模型理论提供的知识

一束光的传输，可以用一个可压缩的流体来模拟它。流体密度分布正比于光束能量分布，流体各点速度正比于光束相应点准程函的梯度。流体模型理论建立了以下的重要参量及其相互关系。

光束可表达为

$$\phi = \phi_0 e^{iKL} \quad (2-1)$$

式中 ϕ_0 及准程函 L 均为空间坐标的实函数。 ϕ_0^2 为场矢量 \mathbf{E} 或 \mathbf{H} 的一个直角坐标分量的能量密度。

对光束横截面取归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^* \phi dx dy = 1 \quad (2-2)$$

有: (1) 傍轴光束横截面内禀能量 E_i

$$E_i = \frac{1}{K^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (2-3)$$

(2) 傍轴光束横截面横向能量 E_t

$$E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^2 (\nabla L)_\perp^2 dx dy \quad (2-4)$$

$(\nabla L)_\perp$: (∇L) 垂直于光束轴线的分量

(3) 傍轴光束横截面内能 E_0

$$E_0 = E_i + E_t \quad (2-5)$$

在文献[4]中, 已严格证明了: 在自由空间传输过程中, 傍轴光束垂直于光轴的任一截面的内能是一不变量, 即 E_0 不含坐标变量 Z 。为了把内能是不变量这一论断用于分析光束传输过程中波面曲率半径的变化, 进一步定义(4)、(5)两个傍轴光束参量。

(4) 等效束宽 Σ

$$\Sigma \equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2) \phi_0^2 dx dy \right]^{1/2} \quad (2-6)$$

并定义 Σ 取极小值 Σ_{\min} 的截面为光束焦平面。

(5) 等效波面曲率半径 \bar{R}

$$\bar{R} \equiv \left[\frac{1}{E_t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2) \phi_0^2 dx dy \right]^{1/2} \quad (2-7)$$

为了计算简便, 以下只考虑一维光束, 即 ϕ 中只有坐标变量 x, z , 不含 y 。

对于一维的基模高斯光束, 本节所定义的几个量分别等于:

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= 1/K^2 \sigma_0^2 \\ E_i &= 1/K^2 \sigma^2 \\ E_t &= (1/\sigma_0^2 - 1/\sigma^2)/K^2 \\ \Sigma &= \sigma/2 \\ \bar{R} = R &= (K^2 \sigma_0^4 + 4Z^2)/4Z \\ \sigma &= \frac{1}{K\sigma_0} (K^2 \sigma_0^4 + 4Z^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

现在回过来分析在无限远处扩散了的光束往回传输时波面曲率半径发生的变化。如果是按照几何光学传输, 波面曲率半径 $R=Z$, $|\nabla L|=1$, 并且振幅花样不变, 但与光束截面的位置坐标 Z 成比例地收缩。如果是这样, 则从(2-3)、(2-4)式可看出, 光束截面的横向能量不会随截面沿 Z 轴的位移而变化, 但截面内禀能量却与 $1/Z^2$ 成比例增加。显然, 这与内能为不变量的结论相矛盾。为了保持内能不变, 波面曲率半径 R 必须偏离几何光学的传输而稍大一些, 以便降低横向能量, 使得横向能量与不断增加的内禀能量之和仍保持为不变量。在高斯光束中,

$$R = Z + K^2 \sigma_0^4 / 4Z$$

其中 $K^2 \sigma_0^4 / 4Z$, 即为波面曲率半径受衍射影响而增大的量, 也就是为保持截面内能为不变量所必须增加的部分。既然这是衍射引起的, 则对任何光束, 也必然都存在一个相应的增量, 只不过光束的结构不同, 增量的大小也不同而已。下面我们企图导出任意傍轴光束等效波面曲率半径的这个增量与其他一些参量之间的关系。

三、傍轴光束在准远场区的厄米-高期展开

我们的讨论仍限于一维傍轴光束。利用厄米-高斯模的正交、完备性质,任一傍轴光束均可展开为不同阶厄米-高斯模的线性组合,即

$$\Phi = \sum_m c_m \phi_m \quad (3-1)$$

中 $\phi_m = \phi_{0m} e^{iKLm}$ 是第 m 阶一维厄米-高斯模的标量波函数,其光腰截面是 $Z=0$ 平面。

c_m 为线性组合系数,满足

$$\sum_m c_m^2 = 1 \quad (3-2)$$

这样,上节所列出的有关参量可表示为 Z 的无穷级数:

$$\left. \begin{aligned} E_t &= a_1/Z^2 - a_2/Z^4 + \dots \\ E_t &= a_0/K^2\sigma_0^2 - a_1/z^2 + a_2/Z^4 - \dots \\ \Sigma^2 &= (a_0/K^2\sigma_0^2)Z^2 + a_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_m [c_m^2(2m+1) + 2c_m c_{m-2} \sqrt{m(m-1)}] \\ a_1 &= \sum_m [c_m^2(2m+1) - 2c_m c_{m-2} \sqrt{m(m-1)}] \frac{\sigma_0^2}{4} \\ a_2 &= \left\{ \sum_m [c_m^2(2m+1) - 6c_m c_{m-2} \sqrt{m(m-1)}] + \sum_m \sum_n (m-n)^2 \alpha_{mn} \right\} \frac{K^2 \sigma_0^6}{16} \\ \alpha_{mn} &= c_m^2 c_n^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi_{0m} \frac{\partial \phi_{0n}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{0m}}{\partial x} \phi_{0n}}{c_m \phi_{0m} + c_n \phi_{0n}} \right)^2 \cdot dx \end{aligned}$$

a_0, a_1, a_2 以及 α_{mn} 都是与坐标 x, z 无关的常数。

在准远场区段, (3-3) 式中的级数只需保留前两项,其余各项均可作为高阶小量而略去。此外,这个傍轴光束的焦平面显然落在每个厄米-高斯模的光腰所在的截面上,即 $Z=0$ 平面。

四、准远场区段傍轴光束传输方程组

在实际应用中,我们并不希望也无必要将给定的光束具体展开为厄米-高斯模的线性组合,而只是想从上节所作的展开中找出几个流体模型参量之间的关联,以此来建立适用于准远场区段的傍轴光束传输方程组。按上节的结果,在准远场区段 E_t, Σ 可表示为

$$\begin{cases} E_t = A(1-\eta) \cdot \frac{1}{Z^2} \\ \Sigma = D(1+\xi) \cdot Z \end{cases} \quad (4-1)$$

式中, $\eta \equiv \eta_0/Z^2$; $\xi \equiv \xi_0/Z^2$ 。 η_0, ξ_0 及 A, D 是与光束结构有关但不含坐标 x, z 的待定参数。

由(2-7)、(2-8)、(2-6)式,得

$$E_t = \Sigma^2 / \bar{R}^2; \quad E_t = E_0 - E_4$$

所以

$$\bar{R}^2 = \Sigma^2 / E_0 (1 - E_i / E_0) \quad (4-2)$$

在准远场区段, $E_i / E_0 \ll 1$, 故由(4-2)式可得

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &\approx \frac{\Sigma^2}{E_0} \left(1 + \frac{E_i}{E_0}\right) \\ \bar{R} &\approx \frac{\Sigma}{\sqrt{E_0}} \left(1 + \frac{E_i}{2E_0}\right) \end{aligned} \quad (4-3)$$

将(4-1)式代入上式, 并考虑到 $\eta \ll 1$, $\xi \ll 1$, 得

$$\bar{R} = \frac{D}{\sqrt{E_0}} \left(1 + \frac{\xi_0 + \frac{A}{2E_0}}{Z^2}\right) Z \quad (4-4)$$

由(3-3)式可得

$$A = 2E_0 \xi_0 \quad (4-5)$$

将(4-5)代入(4-4)式, 得

$$\bar{R} = \frac{D}{\sqrt{E_0}} \left(1 + \frac{2\xi_0}{Z^2}\right) Z \quad (4-6)$$

此外, 在远场区段, $R = Z$, $E_i = E_0$, 从(2-7)、(2-8)式可得 $\Sigma = ZE_0$ 。由此, 可断定(4-1)式中的系数 $D = \sqrt{E_0}$ 。这样, 就得到一组传输方程组:

$$\left. \begin{aligned} E_i &= 2\xi_0 E_0 (1 - \eta) \cdot (1/Z^2) \\ \Sigma &= \sqrt{E_0} (1 + \xi) Z \\ \bar{R} &= (1 + 2\xi) \cdot Z \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

式中

$$\eta = \eta_0 / Z^2; \quad \xi = \xi_0 / Z^2。$$

现在计算 ξ_0 。将(4-7)式中第一、二两式相乘得

$$\Sigma^2 E_i = 2\xi_0 E_0^2 (1 - \eta + 2\xi)$$

考虑到 $(2\xi - \eta) \ll 1$, 同时 ξ_0 出现在小量 ξ 之中, 故可取以下近似:

$$\xi_0 \approx \Sigma^2 E_i / 2E_0^2 \quad (4-8)$$

将(4-8)式代入(4-7)式, 得

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \frac{\Sigma^2 E_i}{E_0} (1 - \eta) \cdot \frac{1}{Z^2} \\ \Sigma &= \sqrt{E_0} \left[1 + \left(\frac{\Sigma^2 E_i}{2E_0^2}\right) \cdot \frac{1}{Z^2}\right] \cdot Z \\ \bar{R} &= \left[1 + \left(\frac{\Sigma^2 E_i}{E_0^2}\right) \frac{1}{Z^2}\right] Z \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

将传输方程组写成(4-9)式的形式的目的在于: 如果给定了光束在准远场区段一个截面上的振幅及位相分布, 则可按(2-4)、(2-5)、(2-6)、(2-7)式求得 E_i 、 E_0 、 Σ , 然后代入(4-9)式中的第二、三式得到 Σ 、 \bar{R} 在准远场区段的具体计算表达式, 并得出该截面的位置坐标 Z , 再用(4-9)第一式得出 η_0 值。当然, $(\Sigma^2 E_i)$ 值随截面的位置不同而有细微的变化, 但在(4-9)第二、三式中可忽略, 在(4-9)第一式中则稍有差别。

在应用中, 人们感兴趣的是 \bar{R} 与 Z 值之差 Δ :

$$\Delta = \bar{R} - Z = \Sigma^2 E_i / E_0^2 Z \approx \Sigma^2 E_i / E_0^2 \bar{R} \quad (4-10)$$

因此, 只要给定一个光束横截面的振幅、位相分布, 利用(2-4)~(2-8)式以及(4-10)式, 即可确

定光束焦平面的位置

五、与高斯光束传输的对比

高斯光束的波面曲率半径 R 以及束宽 σ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(1 + \frac{Z_0^2}{Z^2}\right)Z \\ \frac{\sigma}{2} &= \frac{1}{K\sigma_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{Z_0^2}{Z^2}\right)Z \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

式中

$$Z_0^2 = K^2 \sigma_0^4 / 4.$$

由(2-9)式可看出, $1/K\sigma_0$ 就是高斯光束内能的平方根。

(5-1)式与(4-7)式相比较, 可看出任意傍轴光束在准远场区段的传输与高斯光束的传输具有相同的特征。因此, 可以建立一个等效高斯光束与傍轴光束相对应、相匹配。令

$$\left. \begin{aligned} 2\xi_0 &= K^2 \sigma_0^4 / 4 \\ \sigma_0^4 &= 8\xi_0 / K^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

将(4-8)式代入上式得

$$\sigma_0 = (4\Sigma^2 E_i / K^2 E_0^2)^{1/4} \quad (5-3)$$

$$Z_0^2 = \Sigma^2 E_i / E_0^2 \quad (5-4)$$

这个等效高斯光束的波面曲率半径与相对应的准远场区段傍轴光束的等效波面曲率半径处处相等。此外, 傍轴光束的等效束宽应等于

$$\Sigma = \frac{\sqrt{E_0}}{(1/K\sigma_0)} \cdot \frac{\sigma}{2} = \left(\frac{K\sigma_0 \sqrt{E_0}}{2} \right) \sigma \quad (5-5)$$

六、 $ABCD$ 定律推广用于描写准远场区段傍轴的传输

等效高斯光束的传输当然服从 $ABCD$ 定律, 其复参量 q 等于

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{K\sigma^2} \quad (6-1)$$

如将 R, σ 置换成与之相对应的傍轴光束的有关参数, 可建立傍轴光束的复参量 Q 。由(5-3)、(5-4)式以及(5-1)式, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= 2\Sigma / K \sqrt{E_i} \\ 1/R &= \sqrt{E_i} / \Sigma \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

所以, 由(6-1)式可得傍轴光束的复参量 Q 为

$$\frac{1}{Q} = \frac{\sqrt{E_i}}{\Sigma} - i \frac{\sqrt{E_i}}{\Sigma} \quad (6-3)$$

Q 由三个实参量 Σ, E_i, E_0 组成, 比高斯光束的 R, σ 多一个参量。

这样, 给定了光束一个截面的 Q 值以及光路上的传输矩阵, 就可用 $ABCD$ 定律计算在准远场区段另一截面的 Q 值, 再结合(4-9)式就可得出相应的等效波面曲率半径 \bar{R} 及等效束宽 $\bar{\Sigma}$ 。但需进一步阐明的是: 当等效高斯光束通过透镜或透镜组后, 是否仍与傍轴光束“等效”?

显然, 当傍轴光束穿过透镜时, 它的等效束宽和内禀能量不变, 即 $(\Sigma^2 E_i)$ 不变。但等效波

面曲率半径、横向能量以及内能均改变。分别以 \bar{R} 、 \bar{R}' 、 E_0 、 E'_0 代表紧靠透镜前后表面的等效波面曲率半径和内能,同时考虑到 $E_i/E_0 \ll 1$, 则容易判断出

$$\frac{E'_0}{E_0} \simeq \left(\frac{\bar{R}}{\bar{R}'} \right)^2 \quad (6-4)$$

对于高斯光束,则相应应有

$$\sigma'_0/\sigma_0 \simeq R'/R \quad (6-5)$$

因此

$$(Z'_0/Z_0)^2 = (\sigma'_0/\sigma_0)^4 = (R'/R)^4 = (E_0/E'_0)^2 = (1/E'_0)^2 / (1/E_0)^2 \quad (6-6)$$

从(4-9)式可看出,当光束通过透镜时,因子 $\Sigma^2 E_i / 2E_0^2$ 的变化与 Z_0^2 的变化相同。故对 \bar{R} 而言,经过透镜之后,等效高斯光束仍适用。

关于束宽 Σ ,虽然经过透镜时, σ_0 及 $\sqrt{E_0}$ 都会改变,但由(5-5)、(6-4)、(6-5)式可看出 $(\sigma_0 \sqrt{E_0})$ 保持不变。因此,求 Σ 时,可先用 ABCD 定律得出 $1/Q$ 的虚部,从而得到 σ ,再代入式(5-5)中即得 Σ 。此外,如将算出的 Σ 值代回 $1/Q$ 的虚部,就可得 E_i 值,求得的 E_i 值只准确到 $1/Z^2$ 项。

于是,我们就建立了傍轴光束的复参量 Q 和等效高斯光束,证明了 ABCD 定律可推广应用于傍轴光束,即

$$Q_2 = (AQ_1 + B) / (CQ_1 + D)$$

七、一个数值计算的例子

通过一个实例进行验证。一方面用传输方程组算出一傍轴光束的 $(\bar{R}-Z)$ 值,另一方面用菲涅耳衍射积分直接计算光束焦平面位置(Σ 取极小值的截面位置),以验证两者符合的程度。

作为实例,考虑一维傍轴光束,在给定的初始横截面上,波面为柱面,其曲率半径为 R ,截面上光强 ϕ_0^2 的分布为

$$\phi_0^2 = \begin{cases} [1 + A_m \cos(2\pi f_0 x)]^2 e^{-2(\frac{x}{A})^6} & \text{当 } |x| \leq 2A \\ 0 & \text{当 } |x| > 2A \end{cases}$$

如图 1 所示。

对 R 、 A 、 f_0 、 A_m 取不同值的两种情况,分别作了计算,计算结果见图 2(a)、(b)。

图 2 中的 l 是从初始横截面到某一横截面的距离。图中的实点“·”是采用菲涅耳衍射积分公式计算的结果,利用这些点,采用拉格朗日插值公式得到等效束宽随 l 变化的曲线。设 Σ 取极小值的截面到初始截面的距离为 Z_1 。另一方面,用我们的传输方程组计算出的光束焦平面到初始截面的距离为 Z_2 。

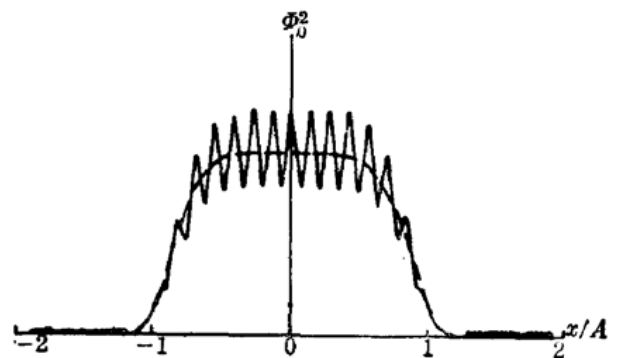


图 1

对图 2(a) 的情形, $Z_1 = 794.5(\text{mm})$, $Z_2 = 794.51(\text{mm})$; 对图 2(b) 的情形, $Z_1 = 396.4$

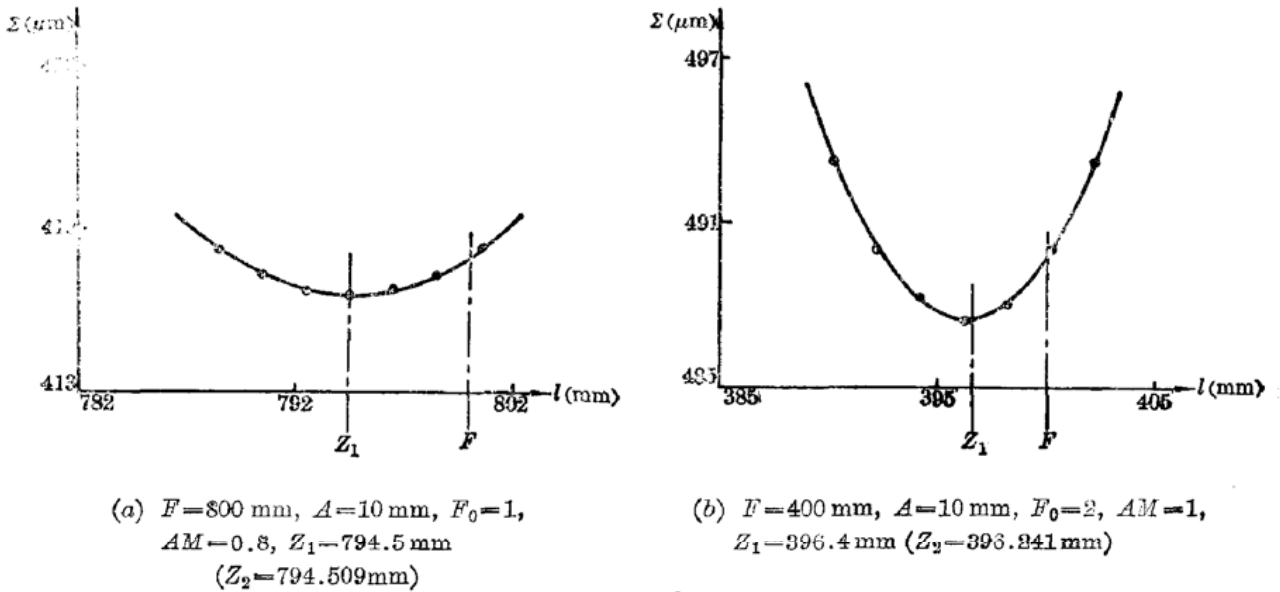


图 2

(mm), $Z_2=396.24$ (mm)。可见,两种方法得出的结果是相当一致的。

由此我们得出以下结论:

(1) 几何光学传输用一个参量描写, 高斯光束传输用两个参量 R 、 σ 描写, 在准远场区段傍轴光束传输用三个参量 Σ 、 E_t 、 E_r 描写。(2) $ABCD$ 定律可推广用于傍轴光束传输。(3) 流体模型理论是描写光束传输的有效理论。

参 考 文 献

- 1 H. Kogelnik; *BSTJ*, **44**, 455(1965),
- 2 邓锡铭, 方洪烈, *激光*, **7**(2), 14(1980)
- 3 邓锡铭, 方洪烈, *激光*, **6**(11), 1(1979)
- 4 邓锡铭, 陈泽尊, *光学学报*, **3**(5), 385(1983)

~~~~~  
 (上接第 272 页)

另外, 还用腔内加光阑的方法, 研究了横模变化特性, 光阑直径  $2a$  可由  $\phi 4$  变化至  $\phi 8$ 。在小于  $\phi 7$  时, 可在平-平腔情况下得到较好的横模输出, 呈高斯分布。分别采用 120 线/mm 和 150 线/mm 的金属基底原刻光栅进行了选频实验, 在  $9\sim 11\mu\text{m}$  范围内得到了近 50 条谱线输出。

寿命试验表明, 以每秒  $1\sim 5$  次的重复频率工作时, 在前 5000 个连续脉冲期间,  $E$  逐渐下降。这显然是由于  $\text{CO}_2$  离解, 形成  $\text{CO}$  和  $\text{O}$ , 随后形成  $\text{N}_2$  的氧化物等有害物质的缘故。此后输出能量达到基本稳定, 即气体离解和复合几乎达到动平衡,  $E$  趋于不变, 直至  $10^6$  次脉冲,  $E$  为初始值的 65%。

### 参 考 文 献

- 1 潘承志 *et al.*, *激光与红外*, **18**(2), 19(1988)
- 2 R. Marchetti *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-11**(11), 1766(1975)
- 3 A. J. Palmer *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*; **QE-10**, 751(1974)
- 4 K J. Andrews *et al.*, *J. Phys. Scientific Instrum.*, **8** (6), 493(1975)