第17卷 第3期
1990年3月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. 17, No. 3
March, 1990

非轴对称光腔的矩阵光学分析

林 强 王绍民 吕百达
(杭州大学物理系) (四川大学物理系)

提要：用矩阵光学理论对一般非轴对称光学谐振腔进行了研究，得出基模本征解。讨论了约束稳定、非约束稳定及准约束稳定的条件。指出这种腔在一般情况下存在双解。所得结果适用于多元件非轴对称光腔，具有普遍性。

关键词：非轴对称光腔，复曲率张量

Analysis of axially-asymmetric optical resonators by means of matrix optics

Lin Qiang, Wang Shaomin
(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou)

Lü Baida
(Department of Physics, Sichuan University, Chenhdu)

Abstract: Conventional axially-asymmetric optical resonator is investigated by means of matrix optics theory. The fundamental eigen mode solution is obtained. The stable, unstable and quasi-stable confinement conditions are discussed. This kind of resonator has two solutions generally. The results are suitable for multi-element axially asymmetric resonators.

Key words: axially-asymmetric optical resonators, complex curvature tensor

一、引 言

非轴对称光学谐振腔是普遍存在的。对简单的非轴对称光腔可在$x-z$、$y-z$平面内分别用处理轴对称腔的方法进行分析[1]，但更为一般的情况x、y是有耦合的。文献[2]分析了x、y有耦合的光波导的稳定性。文献[3]从严格的ε-δ数学语言出发分析了一般非轴对称腔的约束稳定条件，得出稳定图。文献[4]则用积分方程对两镜扭曲腔进行了研究。但迄今尚未见到关于一般非轴对称腔的自洽解的统一描述。

本文首先引入光束复曲率张量的概念，然后运用张量$ABCD$定律[5]及矩阵光学的一些技巧，得出了一般非轴对称腔基模的自洽解，从而可得光斑尺寸公式及稳定性条件。从结果可看出，这种腔一般存在双解。

收稿日期：1988年4月12日。

二、描述非轴对称光学系统的 4×4 阶矩阵

当光学系统中包含柱透镜、像散透镜、椭球面镜等元件，以及光线斜入射时，描述轴对称系统的 2×2 阶矩阵便失效。非轴对称系统的近轴问题可用 4×4 阶矩阵描写[6,7]，其定义为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}'_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中

$$r_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad r'_i = \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix}, \ i=1,\ 2$$

下标 1 和 2 分别代表入射光线和出射光线。A、B、C、D 均为 2×2 阶矩阵。

从输入面到输出面的程函可表示为[8]

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\left[-n_1(x_1x'_1 + y_1y'_1) + n_2(x_2x'_2 + y_2y'_2)\right] \tag{2}$$

其中 L_0 为轴上光程，n_1、n_2 分别为入射空间和出射空间的折射率。把(2)成矢量形式，有

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中“T”表示转置。R 为 4×4 阶矩阵：

$$R = \begin{pmatrix} n_1B^{-1}A & -n_1B^{-1} \\ n_2(C-DB^{-1}A) & n_2DB^{-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

因为 L 为标量，$L^T=L$，故 $R^T=R$，从而

$$\begin{cases} (n_1B^{-1}A)^T = n_1B^{-1}A \\ (-n_1B^{-1})^T = n_2(C-DB^{-1}A) \\ (n_2DB^{-1})^T = n_2DB^{-1} \end{cases} \tag{5}$$

从(5)可直接推出

$$\begin{cases} AD^T - BC^T = \dfrac{n_1}{n_2}E \\ A^TD - C^TB = \dfrac{n_1}{n_2}E \end{cases} \tag{6}$$

其中 E 为单位方阵。当 $n_1=n_2$ 时，还可推出

$$\begin{cases} BA^T = AB^T \\ CD^T = DC^T \\ C^TA = A^TC \\ D^TB = B^TD \end{cases} \tag{7}$$

4×4 阶矩阵的反向传输公式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \underleftarrow{\boldsymbol{r}'_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_2 \\ \underleftarrow{\boldsymbol{r}'_2} \end{pmatrix}。 \tag{8}$$

三、椭圆高斯光束的矩阵表示

非轴对称光腔的振荡将产生椭圆高斯光束。基模椭圆高斯光束的电场强度复振幅可表示

为[9]

$$E(x,\ y,\ z)=E_0\exp(-ikz)\exp\left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{q_x}+\frac{y^2}{q_y}\right)\right]$$

$$=E_0\exp(-ikz)\exp\left[-i\frac{k}{2}\,\boldsymbol{r}^T\begin{pmatrix}q_x^{-1} & 0\\ 0 & q_y^{-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{r}\right] \tag{9}$$

其中 k 为波矢，q_x^{-1}、q_y^{-1} 分别为 x、y 方向的复曲率。(9)式是 x、y 方向可分离变量的情况。当坐标 x、y 发生旋转(转角 φ)时，

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\boldsymbol{r}_\varphi \tag{10}$$

在新坐标$(x_\varphi,\ y_\varphi)$中

$$E(x,\ y,\ z)=E_0\exp(-ikz)\exp\left[-i\frac{k}{2}\,\boldsymbol{r}_\varphi^T Q^{-1}\boldsymbol{r}_\varphi\right] \tag{11}$$

其中

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_x^{-1} & 0\\ 0 & q_y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}q_x^{-1}\cos^2\varphi+q_y^{-1}\sin^2\varphi & (q_y^{-1}-q_x^{-1})\sin\varphi\cos\varphi\\ (q_y^{-1}-q_x^{-1})\sin\varphi\cos\varphi & q_x^{-1}\sin^2\varphi+q_y^{-1}\cos^2\varphi\end{pmatrix} \tag{12}$$

因此，任意的椭圆高斯光束可用一个复 2×2 矩阵表示：

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1}\\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1}\end{pmatrix} \tag{13}$$

Q^{-1} 可以称作复曲率张量。从(12)可以看出，Q^{-1}具有转置对称性，因而只要三个复参量便可确定一个椭圆高斯光束，这与文献[9]用 q_{xx}^{-1}、q_{yy}^{-1}、φ 等三个复参量表征椭圆高斯光束是等价的。

可以证明，Q^{-1} 经过非轴对称系统的变换满足张量 $ABCD$ 定律[5]

$$Q_2^{-1}=(C+DQ_1^{-1})(A+BQ_1^{-1})^{-1} \tag{14}$$

当最后求得 Q^{-1} 后，为了求出光束的特征量及其性质，可通过坐标变换使其对角化。坐标旋转的角度有时会出现复数，这时应将 Q^{-1} 分成实部和虚部

$$Q^{-1}=V-iU \tag{15}$$

而将 V、U 分别对角化。V 表示实曲率，U 表征光束的横向强度分布。这时使 V、U 分别对角化的坐标旋转角度 α_V、α_U，两者将不相等，这意味着光束的波前曲率椭圆与光斑强度分布椭圆的取向将不一致，这正是一般像散高斯光束之特性[9]。

然而，并不是所有的二阶矩阵均代表一个椭圆。数学上，描述二次曲线的矩阵 U 的行列式 $\det(U)$在坐标变换前后是不变量，并且

当 $\det(U)>0$ 时，U 代表椭圆；

当 $\det(U)=0$ 时，U 代表二条平行直线；

当 $\det(U)<0$ 时，U 代表双曲线。

因此，$\det(U)$可用作判别 U 所代表的光束横向分布性质的判据。

四、非轴对称光腔的自洽解

4.1 谐振腔内往返矩阵

一般非轴对称光腔如图 1 所示。

反射镜 M_1, M_2 的变换矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ R_1 & E \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ R_2 & E \end{pmatrix}$$

其中 E 为单位阵，R_1、R_2 均是转置对称的 2×2 矩阵，它们与坐标的选取有关。设 M_1、M_2 的两个主曲率方向分别在 x_1、y_1 和 x_2、y_2 上，若选取 x、y 与 x_1、y_1 重合，x_2 与 x 夹角 θ，则

$$R_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{R_{1x}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{R_1y} \end{pmatrix} \tag{16}$$

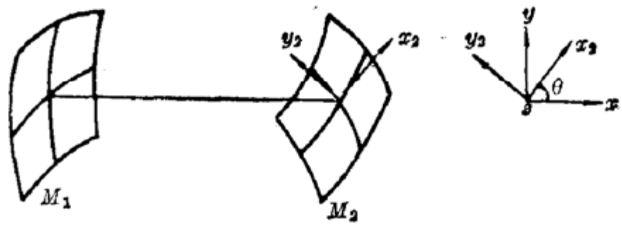

图 1　一般非轴对称谐振腔

$$R_2=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{R_{2x}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{R_2y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中 R_{1x}、R_{1y}、R_{2x}、R_{2y} 分别是 M_1、M_2 的两个主曲率半径。两腔镜之间可以包含非轴对称元件，设其矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

以 M_{1y} 为参考面，腔内往返一周的矩阵为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ R_2 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ R_1 & E \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} D^T+B^TR_2 & B^T \\ C^T+A^TR_2 & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+BR_1 & B \\ C+DR_1 & D \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{18}$$

引入

$$\begin{cases} G_1=A+\dfrac{1}{2}BR_1 \\ G_2=D^T+\dfrac{1}{2}B^TR_2 \end{cases} \tag{19}$$

利用(5)、(7)可证明

$$\begin{cases} G_1B^T=BG_1^T \\ B^{-1}G_1=G_1^TB^{-1T} \\ G_2B=B^TG_2^T \\ G_2^TB^{-1}=B^{-1T}G_2 \end{cases} \tag{20}$$

展开(18)，并利用(5)、(7)、(20)，最后可得

$$\begin{cases}\overline{A}=4G_2G_1-2G_2A-E\\ \overline{B}=2G_2B\\ \overline{C}=4B^{-1}AG_2G_1-2B^{-1}G_1-2B^{-1}AG_2A\\ \overline{D}=2A^TG_2^T-E\end{cases}\tag{21}$$

由(20)可以看出

$$\overline{B}^T=\overline{B}\tag{22}$$

同理，以 M_2 为参考，可算得往返一周矩阵为

$$\begin{pmatrix}\widetilde{A} & \widetilde{B}\\ \widetilde{C} & \widetilde{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ R_1 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D^T & B^T\\ C^T & A^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ R_2 & E\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\widetilde{A}=4G_1G_2-2G_1D^T-E\\ \widetilde{B}=2G_1B^T\\ \widetilde{C}=2DB^{-1}G_1G_2-2B^{-1T}G_2-2DB^{-1}G_1D^T\\ \widetilde{D}=2DG_1^T-E\end{cases}\tag{23}$$

同样也有

$$\widetilde{B}^T=\widetilde{B}\tag{24}$$

可以验证，往返矩阵(21)、(23)同样满足 4×4 阶矩阵的关系式(5)、(6)、(7)。

4.2 自洽解

光腔自洽是指复曲率张量经往返一周后自再现。用 $ABCD$ 定律表述为(以 M_1 为参考)

$$Q^{-1}=(\overline{C}+\overline{D}Q^{-1})(\overline{A}+\overline{B}Q^{-1})^{-1}\tag{25}$$

$$Q^{-1}\overline{B}Q^{-1}+Q^{-1}\overline{A}-\overline{D}Q^{-1}=\overline{C}\tag{26}$$

利用 Q^{-1} 的对称性及(22)，把(26)转置，有

$$Q^{-1}\overline{B}Q^{-1}+\overline{A}^TQ^{-1}-Q^{-1}\overline{D}^T=\overline{C}^T\tag{27}$$

(26)+(27)，再左乘 $\overline{B}$，得

$$2\overline{B}Q^{-1}\overline{B}Q^{-1}+\overline{B}Q^{-1}\overline{A}+\overline{B}\overline{A}^TQ^{-1}-\overline{B}\overline{D}Q^{-1}-\overline{B}Q^{-1}\overline{D}^T=\overline{B}(\overline{C}+\overline{C}^T)\tag{28}$$

(28)左边配成完全平方：

$$2\left[\left(\overline{B}Q^{-1}+\frac{\overline{A}-\overline{D}^T}{2}\right)^2-\left(\frac{\overline{A}-\overline{D}^T}{2}\right)^2\right]=\overline{B}(\overline{C}+\overline{C}^T)\tag{29}$$

$$\left(\overline{B}Q^{-1}+\frac{\overline{A}-\overline{D}^T}{2}\right)^2=\left(\frac{\overline{A}+\overline{D}^T}{2}\right)^2-E\tag{30}$$

在 $\det(\overline{B})\neq0$ 时，有

$$Q^{-1}=\overline{B}^{-1}\left(\frac{\overline{D}^T-\overline{A}}{2}\right)\pm i\overline{B}^{-1}\sqrt{E-\left(\frac{\overline{A}+\overline{D}^T}{2}\right)^2}\tag{31}$$

(31)式便是我们所要求的一般非轴对称光腔的自洽解公式。其中的矩阵开方仅是一个形式。根据(31)式的虚部，可以讨论光腔的约束稳定条件。把往返矩阵(21)代入(31)，可得

$$Q_1^{-1}=-\frac{1}{2}R_1\pm iB^{-1}G_2^{-1}\sqrt{G_2G_1(E-G_2G_1)}\tag{32}$$

可见当光腔约束稳定时，Q_1^{-1} 的实部与腔镜 M_1 完全吻合。若 $\det(\overline{B})=0$，则 Q_1^{-1} 满足

$$\overline{B}Q^{-1}=\frac{\overline{D}^T-\overline{A}}{2}\pm i\sqrt{E-\left(\frac{\overline{A}+\overline{D}^T}{2}\right)^2}\tag{33}$$

五、非轴对称光腔的性质

由以上可知，自洽解的性质将由虚部所决定。设

$$U=B^{-1}G_2^{-1}\sqrt{G_2G_1(E-G_2G_1)} \tag{34}$$

$$S=G_2G_1(E-G_2G_1)=\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$P=\sqrt{S}=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \tag{36}$$

由矩阵开方的意义

$$p_1^2=\frac{s_1(s_1-s_4)^2+s_2s_3(3s_1-s_4)\pm 2s_2s_3\sqrt{\det(s)}}{(s_1-s_4)^2+4s_2s_3} \tag{37}$$

$$p_4^2=\frac{s_4(s_1-s_4)^2+s_2s_3(3s_4-s_1)\pm 2s_2s_3\sqrt{\det(s)}}{(s_1-s_4)^2+4s_2s_3} \tag{38}$$

$$p_2=\frac{s_2}{p_1+p_4} \tag{39}$$

$$p_3=\frac{s_3}{p_1+p_4} \tag{40}$$

(37)、(38)中应同时取正号或同时取负号。因此，矩阵开方将有两个不同的根，这意味着光腔将有两个不同的自洽解。取那个解要根据实际的光腔情况决定。在 $s_2s_3=0$ 或 $\det(s)=0$ 的条件下，两个解重合。事实上，$s_2s_3=0$ 对应于 x、y 可分离变量的情况。

要使光腔约束，必要条件是 U 或 P 为实矩阵，则要求

$$\det(s)\geqslant 0,\quad p_1^2\geqslant 0,\quad p_4^2\geqslant 0 \tag{41}$$

(41)中 p_1^2、p_4^2 不能同时为零。(41)满足时，尚不能保证腔镜上的模向光强分布为椭圆。由第三节可知，此时有三种可能情况：(i) $\det(U)>0$，光腔严格约束稳定，腔镜上光强分布为椭圆；(ii) $\det(U)=0$，光腔准约束稳定，腔镜上光强分布为两条平行线之间的 K 条形；(iii) $\det(U)<0$，光腔准约束稳定，腔镜上光强分布为两条双曲线之间的图形。(ii)和(iii)的准约束稳定区是轴对称光腔所没有的，它实际上表示光束只在一个方向上约束，即腔内光束为高斯光束与点光束之组合。上面的讨论均认为腔内不存在有限光阑。若存在光阑，光斑形状还与光阑大小、形状有关。上述结论很容易退化到 x、y 可分离变化的情况。在(37)～(40)中令 $s_2=s_3=0$，则

$$p_1^2=s_1,\ p_4^2=s_4,\ p_2=p_3=0。$$

(41)要求 s_1、s_4 均大于零，即 x、y 方向均约束稳定。当 $s_2=s_3=0$，并且 $s_1=s_4$ 时，便回到轴对称光腔的情形。

参　考　文　献

1 Hanna D. C., *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-5**, 483(1969)

2 Kahn W. K., Proceedings of the Symposium on Modern Optics, J. Fox, Ed. (Polytechnic Press, Brooklyn, 1967)

3 谈镐生 et al., 中国科学, A 辑, **5**, 557(1981)

4 方洪烈，光学谐振腔理论(科学出版社，北京，1981)

5 林强 *et al.*, 光学学报, **8**, 658(1988)

6 Arsenault H. H., *J. Opt.* (Paris), **11**, 87(1980)

7 Attard A. E., *Appl. Opt.*, **23**, 2706(1984)

8 Collins S. A., Jr, *JOSA*, **60**, 1168(1970)

9 Arnaud J. A. *et al.*, *Appl. Opt.*, **8**, 1687(1969)