

电磁波 Wiggler 中的电子轨迹与变 γ 特性

周士谔 封碧波 张世昌

(成都电子科技大学物理系)

提要: 本文在将相对论因子 γ 考虑为变量情况下, 分析了电磁波 Wiggler 并具有轴向导引场自由电子激光中的电子轨道特性。结果表明, 对应不同条件, 电子轨道将分别为不稳定、不规则或环状包络形。给出 γ 不变, 得到圆状投影轨道时的条件。

关键词: 自由电子激光, 电子轨道, 变 γ 特性

Electron orbits and variation character of γ in electromagnetic wigglers

Zhou Shi'e, Feng Bibo, Zhang Shichang

(Department of Physics, Chengdu University of Electronic Science and Technology, Chengdu)

Abstract: The electron trajectories in free-electron lasers with an electromagnetic wiggler and an axially guided magnetic field are analysed with the relativistic factor variable γ , which were usually assumed to be constant and the equations were linearized. A solution of the nonlinear relativistic equations of motion for such a system is presented. The results show that the electron trajectories are unstable, irregular, ring-shaped, corresponding to $\Omega_0/(\gamma_0\omega) =, \approx, \text{ or } <, > (1+u_{30})$ respectively. The condition for constant γ and hence a circle projected trajectory is given.

Key words: FEL, electron orbit variation character of γ

一、引言

电磁波 Wiggler 自由电子激光(FEL)比静磁 Wiggler 能工作在更高的频段范围, 已越来越得到人们的重视^[1~5]。迄今为止, 在电磁波 Wiggler 自由电子激光单粒子轨道的理论分析中, 一般都把电子的相对论因子 γ 定为常数^[3], 由此导出电子在螺旋坐标系下的运动速度 $v_2=0, \dot{v}_1=\dot{v}_3=0$, 这与实际情况不符。因为电子在电磁波 Wiggler 场作用下, 它们之间存在能量交换, γ 一般不为常数。而且, 将 γ 定为常数, 对电子运动轨道稳定性分析的结论也与实际不符。本文考虑了 γ 随时间而变的情况, 分析与得出了在具有轴向导引场的电磁波 Wiggler 自由电子激光中电子运动的轨道方程, 结果表明, 电子在谐振点上轨道是不稳定的; 近谐振点时轨道是不规则的, 因此增益不可能达到最大; γ 为常数是本文分析中的一个特例, 并给出了

为常数时必须满足的初始条件。这对正确选择工作参数,提高自由电子激光器的增益和效率提供了更好的依据。

二、单电子的运动轨道

电磁波 Wiggler 场可用平面电磁波来描述^[3],其电磁场分量分别为

$$\mathbf{B}_w(z, t) = B_w[\hat{e}_x \cos(K_w z + \omega_w t) + \hat{e}_y \sin(K_w z + \omega_w t)] \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_w(z, t) = \omega_w / (K_w c) B_w [-\hat{e}_x \sin(K_w z + \omega_w t) + \hat{e}_y \cos(K_w z + \omega_w t)] \quad (2)$$

其中 B_w 、 ω_w 和 K_w 分别为 Wiggler 场的振幅、频率和波矢。若在 Wiggler 与电子相互作用区再加上轴向导引场 $B_0 \hat{e}_z$, 则该系统的电子相对论运动方程可表示为

$$\begin{cases} m^{d(\gamma v)} / dt = -e \left[\mathbf{E}_w + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}' \right] & (3) \\ d\gamma / dt = -\frac{e}{mc^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_w & (4) \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B}_w + B_0 \hat{e}_z & (5) \end{cases}$$

m 、 e 分别是电子的静质量和电量绝对值。现选用螺旋坐标参照系

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{e}_x \cos(K_w z + \omega_w t) + \hat{e}_y \sin(K_w z + \omega_w t) \\ \hat{e}_2 = -\hat{e}_x \sin(K_w z + \omega_w t) + \hat{e}_y \cos(K_w z + \omega_w t) \\ \hat{e}_3 = \hat{e}_z \end{cases} \quad (6)$$

将(1)、(2)代入(3)、(4),在螺旋坐标系下,电子的运动方程化为

$$\begin{cases} \frac{d(\gamma v_1)}{dt} = -\frac{eB_0}{mc} v_2 + (K_w v_3 + \omega_w) \gamma v_2 \\ \frac{d(\gamma v_2)}{dt} = -\frac{eB_w}{mc} \cdot \frac{\omega_w}{K_w} - \frac{eB_w}{mc} v_3 + \frac{eB_0}{mc} v_1 - (K_w v_3 + \omega_w) \gamma v_1 \\ \frac{d(\gamma v_3)}{dt} = \frac{eB_w}{mc} v_2 \\ \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{eB_w}{mc} \cdot \frac{\omega_w}{K_w c} \cdot \frac{v_2}{c} \end{cases} \quad (7)$$

为方便计,略去下标 w , 令 $\Omega = eB/(mc)$, $\Omega_0 = eB_0/(mc)$ 。且设电磁 Wiggler 场在相互作用区无色散,即 $\omega = K$ 。作归一化处理,令 $\tau = \omega t$, $u_i = v_i/c$ ($i=1, 2, 3$), (7)式简化为

$$\frac{d(\gamma u_1)}{d\tau} = -\frac{\Omega_0}{\omega} u_2 + (1+u_3) \gamma u_2 \quad (8)$$

$$\frac{d(\gamma u_2)}{d\tau} = -\frac{\Omega}{\omega} (1+u_3) + \frac{\Omega_0}{\omega} u_1 - (1+u_3) \gamma u_1 \quad (9)$$

$$\frac{d(\gamma u_3)}{d\tau} = \frac{\Omega}{\omega} u_2 \quad (10)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{\Omega}{\omega} u_2 \quad (11)$$

为在上述 4 式中消去 u_1 、 u_2 、 u_3 , 将(10)、(11)相加并积分,得

$$\begin{cases} \gamma u_3 = D - \gamma & (12) \\ D = \gamma_0 (1 + u_{30}) & (13) \end{cases}$$

其中 γ_0, u_{30} 为 γ 和 u_3 在 $t=0$ 时的值。将(10)、(11)两式代入(8), 经积分整理后得

$$\begin{cases} \gamma u_1 = \Omega_0/\Omega \cdot \gamma + \omega/(2\Omega) \cdot [(\gamma u_3)^2 - \gamma^2] + A & (14) \\ A = (u_{10} - \Omega_0/\Omega) \gamma_0 + \omega/(2\Omega) \cdot (1 - u_{30}^2) \gamma_0^2 & (15) \end{cases}$$

利用(12)、(14), (9)式可化为

$$\frac{d(\gamma u_2)}{d\tau} = [(\Omega_0/\omega - D) \cdot (\omega/(2\Omega)) \cdot D^2 + A - \Omega/\omega \cdot D] \gamma^{-1} + \omega/\Omega \cdot (\Omega_0/\omega - D)^2 \quad (16)$$

又, $d(\gamma u_2)/d\tau = u_2(d\gamma/d\tau) + \gamma(du_2/d\tau)$, 利用(11)式可得

$$\frac{d(\gamma u_2)}{d\tau} = -\frac{\omega}{\Omega} \left[\gamma \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (17)$$

比较(16)、(17), 得

$$\begin{cases} \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 = \frac{E}{\gamma^2} + \frac{F}{\gamma} & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = -\frac{\Omega}{\omega} \left[\left(\frac{\Omega_0}{\omega} - D \right) \cdot \left(\frac{\omega}{2\Omega} D^2 + A \right) - \frac{\Omega}{\omega} D \right] & (19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = -\left[\frac{\Omega_0}{\omega} - \gamma_0(1 + u_{30}) \right]^2 & (20) \end{cases}$$

描写 γ 随时间变化规律的(18)式, 是一非线性常微分方程, 可通过以下变量代换法求解。先令 $\eta = d\gamma/d\tau$, $d^2\gamma/d\tau^2 = \eta(d\eta/d\gamma)$, (18)式化为 $\eta \cdot d\eta/d\gamma + \eta^2/\gamma = E/\gamma^2 + F/\gamma$ 。再令 $\xi = \eta^2$, 得

$$\frac{1}{2} \cdot d\xi/d\gamma + \xi/\gamma = E/\gamma^2 + F/\gamma。$$

最后可得

$$\begin{cases} \xi = (d\gamma/d\tau)^2 = \gamma^{-2}(c + 2E\gamma + F\gamma^2) & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -2E\gamma_0 + \left[\left(\frac{\Omega}{\omega} u_{20} \right)^2 - F\gamma_0^2 \right] & (22) \end{cases}$$

(21)式给出 γ 随时间变化的关系式如下

$$\left\{ \gamma = \frac{1}{F} \left\{ E - \sqrt{E^2 - Fc} \cdot \sin \left(\pm \frac{F \cdot \sqrt{-F}}{E} \cdot \tau - \left[\frac{\sqrt{-F}}{E} \sqrt{F\gamma^2 + 2E\gamma + c} \right]_{\gamma_0} + \theta_0 \right) \right\} \right. \quad (23)$$

$$\left. \theta_0 = -\arcsin [(-F\gamma_0 - E)/\sqrt{E^2 - Fc}] \right\} \quad (24)$$

由(20), $F \leq 0$; 由(23), 因 $\gamma > 0$, 须满足 $E^2 > Fc$; (23)式右方“ \pm ”号来源于(21), 需由初值条件结合(11)式判断出, 因只影响一相位因子, 不改变对以下轨道特性的分析。由(23)式可以看出, 当 $F \rightarrow 0$, 即 $\Omega_0/\omega = \gamma_0(1 + u_{30})$, 系统处在谐振点附近时, γ 发散, 轨道是不稳定的。在离谐振点适当远时, γ 有波动, 但不太大。忽略(23)右正弦函数后括号内的中间项, 即得 γ 的正弦变化解。将此结果分别代入(14)、(11)、(12)三式, 解得 u_1, u_2, u_3 , 从而得出方程(8)~(11)的一套完整解

$$\begin{cases} \gamma = P_0 + P_1 \sin(R_0\tau + \theta_0) & (25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = Q_0 + Q_1 \sin(R_0\tau + \theta_0) & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = H \cos(R_0\tau + \theta_0) & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \gamma_0^{-1} [D - P_0 - P_1 \sin(R_0\tau + \theta_0)] & (28) \end{cases}$$

其中 $P_0 = -E/F$, $P_1 = \sqrt{E^2 - Fc}/F$, $R_0 = \pm F\sqrt{-F}/E$, $Q_0 = \gamma_0^{-1} \cdot [\omega/2\Omega \cdot D^2 + A + P_0(\Omega_0/\Omega - \omega/\Omega \cdot D)]$, $Q_1 = \gamma_0^{-1} P_1 \cdot (\Omega_0/\Omega - \omega/\Omega \cdot D)$, $H = -(\omega P_1)/(\Omega R_0)$ 。将各速度分量变换

回直角坐标系

$$\begin{cases} u_x = u_1 \cos(Kz + \omega t) - u_2 \sin(Kz + \omega t) \\ u_y = u_1 \sin(Kz + \omega t) + u_2 \cos(Kz + \omega t) \\ u_z = u_3 \end{cases} \quad (29)$$

由(28)、(31)知 u_x 绕定值作微小正弦波动。在求 u_x 与 u_y 时, 可令 $z = V_{z0}t$, 由(29)、(26)、(27)、(28)得出

$$\begin{cases} u_x = Q_0 \cos S_0 \tau + \frac{Q_1 - H}{2} \cdot \sin[(R_0 + S_0)\tau + \theta_0] + \frac{Q_1 + H}{2} \cdot \sin[(R_0 - S_0)\tau + \theta_0] \\ u_y = Q_0 \sin S_0 \cdot \tau - \frac{Q_1 - H}{2} \cos[(R_0 + S_0)\tau + \theta_0] + \frac{Q_1 + H}{2} \cos[(R_0 - S_0)\tau + \theta_0] \\ u_z = \gamma_0^{-1} \cdot [D - P_0 - P_1 \sin(R_0 \tau + \theta_0)] \end{cases} \quad (30)$$

其中 $S_0 = 1 + u_{z0}$, $\tau = \omega t$ 。对上式积分即得电子在场中的轨迹

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{c}{\omega} \cdot \left\{ \frac{Q_0}{S_0} \sin S_0 \tau + \frac{Q_1 - H}{2(R_0 + S_0)} [\cos \theta_0 - \cos((R_0 + S_0)\tau + \theta_0)] \right. \\ \quad \left. + \frac{Q_1 + H}{2(R_0 - S_0)} [\cos \theta_0 - \cos((R_0 - S_0)\tau + \theta_0)] \right\} \\ y = y_0 + \frac{c}{\omega} \cdot \left\{ \frac{Q_0}{S_0} (1 - \cos S_0 \tau) - \frac{Q_1 - H}{2(R_0 + S_0)} [\sin((R_0 + S_0)\tau + \theta_0) - \sin \theta_0] \right. \\ \quad \left. + \frac{Q_1 + H}{2(R_0 - S_0)} \cdot [\sin((R_0 - S_0)\tau + \theta_0) - \sin \theta_0] \right\} \\ z = z_0 + \frac{c}{\omega \gamma_0} \left\{ (D - P_0)\tau + \frac{P_1}{R_0} [\cos(R_0 \tau + \theta_0) - \cos \theta_0] \right\} \end{cases} \quad (31)$$

以上各解析解, 连同很靠近谐振点处的情况, 我们已用计算机对(8)~(11)作数值解进行过验算, 结果完全相符。

三、讨 论

1. 在谐振点处 γ 发散, 轨道不稳定。图 1 与图 2 为十分靠近谐振点处, 用计算机对方程(8)~(11)直接进行数值求解所得的结果。选用的各参数与初值为: $\Omega_0/(\gamma_0 \omega) = 0.05$, $u_{10} = 0.1019$, $u_{20} = 0$, $u_{30} = 0.9529$, $\Omega_0/(\gamma_0 \omega) = 2.0$ 。由谐振点条件 $\Omega_0/(\gamma_0 \omega) \approx (1 + u_{30})$, 现

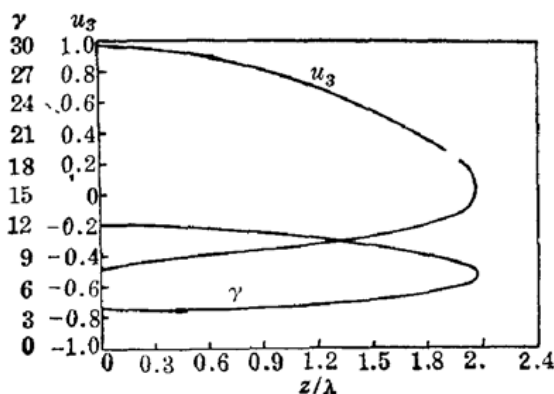


图 1 离谐振点很近时, 纵向速度 u_3 及 γ 的轴向分布曲线。 λ —Wiggler 波长

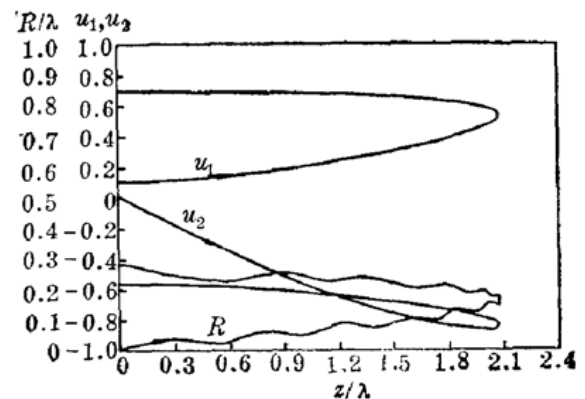


图 2 离谐振点很近时横向速度 u_1, u_2 及离轴距离 R 的轴向分布曲线

$1+u_{30}=1.9529$, 与谐振点处相差 0.0471。图中的箭头代表曲线的时间演化方向。从图 1 中可看出, u_3 在转折点变为 0 又沿反向增加, 说明电子在纵向处又返回运动。 γ 随 z 逐步增长到一定值后又沿 z 反向继续增加, 即电子动能逐步增加, 最后又从 $z=0$ 的入口处钻出。图 2 为相应的横向速度 u_1, u_2 及离轴距离 R 的纵向分布情况, 其中 $R = \sqrt{(x/\lambda)^2 + (y/\lambda)^2}$ 。从 R 的分布曲线可看出电子横向旋转半径逐渐增加, 在返回入口处时, R 接近最大。若考虑很高的横向旋转效应的电磁辐射作用, 电子的实际运动可能在入口与图上折返处间来回振动, 此时泵浦场与导引场起着磁镜的作用。

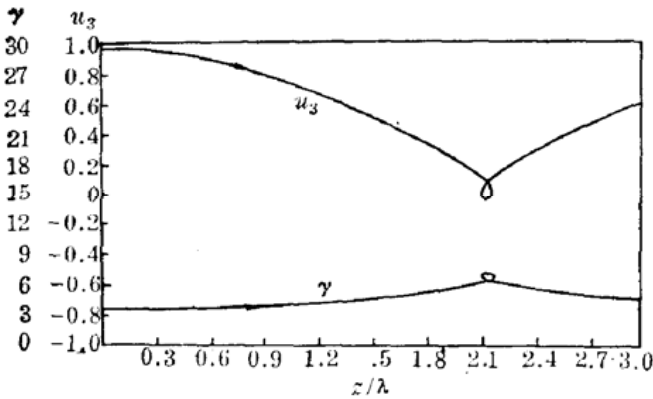


图 3 离谐振点较近时 u_3 与 γ 的轴向分布曲线

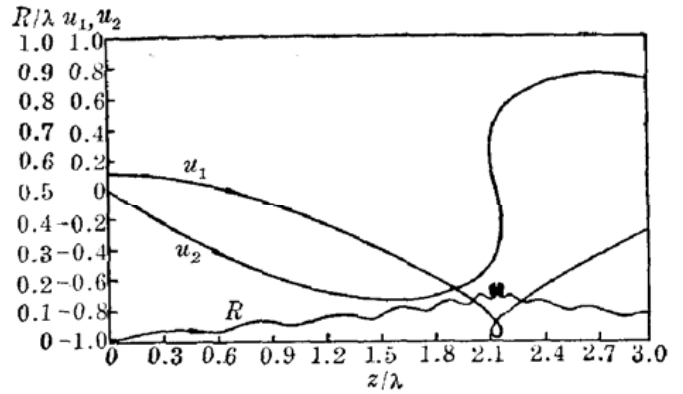


图 4 离谐振点较近时 u_1, u_2 及 R 的轴向分布曲线

2. 在离开谐振点一定值但又不是很远的情况示于图 3 与图 4。所选参数与初值为 $\Omega_0/(\gamma_0\omega)=1.85$, $\gamma=3.5$, 其余同图 1 与图 2。此时 $(1+u_{30})=1.9529$, 与谐振点处相差 0.1029。从图 3、图 4 中可看出电子不再折返, 但轨道仍很不规则。在某一纵向处, 各曲线产生绞结或扭折 (u_2), 说明电子在此处沿 z 仍有振动现象, 电子处在绞结区的时间较长。

3. 在离谐振处, 轨道呈波动状。图 5 是电子轨道在 $x-y$ 横截面上的投影, 由计算机用高分辨率作图法将电子经过 100 个电磁 Wiggler 周期的运动轨道打印在图上。解算参数为 $\Omega/(\gamma_0\omega)=0.05$, $\Omega_0/(\gamma_0\omega)=1$, $u_{10}=0.1019$, $u_{20}=0$, $u_{30}=0.9529$ 。图 6 为电子在不同 z 处的离轴情况。可见运动轨道在横截面的投影基本上限制在某一圆环内, 轨道呈圆环状包络状。

4. γ 为常数时, 轨道规则稳定, 此时轨道的横截面投影为一完整的圆, 其轨道半径

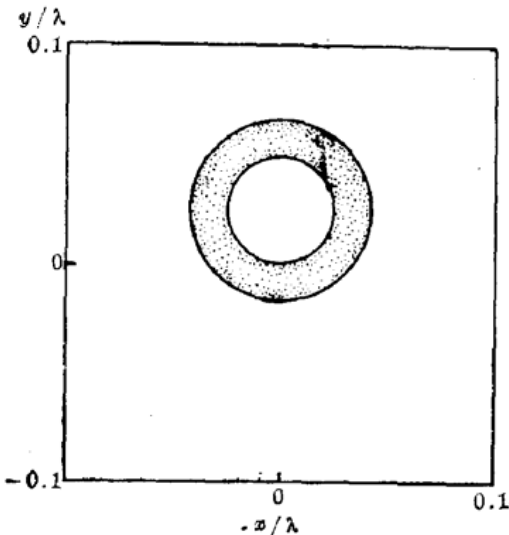


图 5 在 $x-y$ 截面处电子轨道的投影图

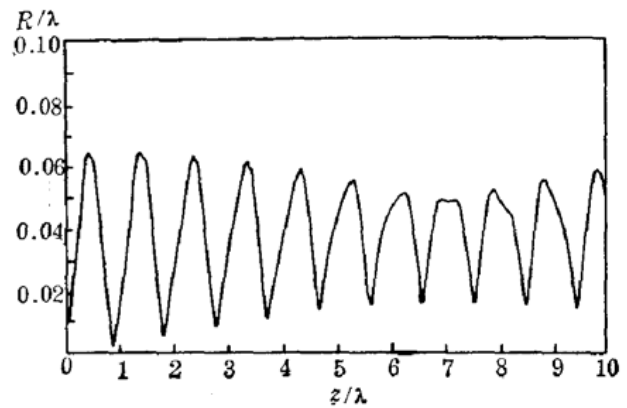


图 6 电子在不同 z 处的离轴量 (R —离轴量)

为 $R = (CQ_0)/[\omega(1+u_{30})]$ 。由 (25) 式, 可得稳定圆轨道的条件为 $P_0 = \gamma_0$, $P_1 = 0$, 由此解得:

$$\begin{cases} \Omega_0/(\gamma_0\omega) = [1 + \Omega/(\gamma_0\omega u_{10})] \cdot (1 + u_{30}) \\ u_{20} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

上两式给出了稳定圆轨道的条件, 可供设计时参考。在常 γ 或线性近似处理中, 该条件被忽略。

参 考 文 献

- 1 L. R. Elias, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(15), 977(1979)
- 2 Y. Carmel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(7), 566(1983)
- 3 H. P. Freund *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-21**(7), 1080(1985)
- 4 H. P. Freund *et al.*, *Phys. Rev. A.*, **34**(3), 2007(1986)
- 5 H. P. Freund, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-23**(9), 1590(1987)

(上接第 158 页)

模本征值相对增高, 由于各模式的贡献, 光束发散度随 C 的减小而增大。在这同时, 基模由于其半径 w_0 的减小也使得发散度增大。当 $C > 1$ 时, 虽然高阶模被抑制了(见图 3), 但由于 $w_A \ll w_0$, 光束发散角由光阑孔决定, 所以发散角也随滤波孔的减小而增大。在 $C = 1 \sim 1.2$ 时, 发散角接近衍射极限。这表明, 在能够抑制高阶模的条件下, 不宜再减小孔径尺寸, 反之, 对输出功率和方向性都会带来不利。一般取孔径比值 C 为 $1 \sim 1.2$ 。

五、实验结果

自滤波非稳腔的设计主要满足以下几个关系:^[3]

$$\text{SFUR 条件 } a = w_A = (0.61\lambda f_1)^{1/2} \quad (10)$$

$$\text{共焦条件 } L = f_1 + f_2 \quad (11)$$

$$\text{有效放大率 } M_{\text{eff}} = 1.5 M = -1.5(f_2/f_1) \quad (12)$$

$$\text{准直光束直径 } D = |M_{\text{eff}}| 2w_A \quad (13)$$

实验中往往受到实验室空间尺寸的限制, 因此自滤波非稳腔最宜用于高增益、小口径、大功率输出的激光器件。我们在一台极距 550 mm、内径 13 mm 的溴化亚铜激光器上做了实验。采用 $f_1 = 500$ mm, $f_2 = 4000$ mm, $w_A = 0.4$ mm 的反射镜和滤波孔, 获得方向性为 0.5 mrad 输出光。输出功率为采用稳腔输出时的 80%, 方向性提高 12 倍。采用 CCD 光电耦合装置, 测得光束截面上的光强分布, 如图 7 所示。很明显, 经小孔滤波, 远场光强接近高斯分布。

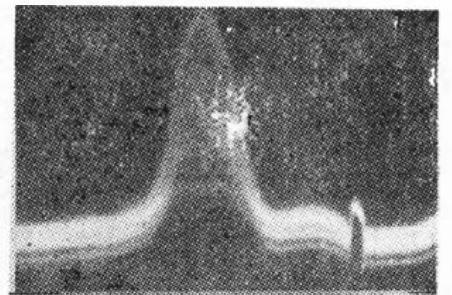


图 7 输出光束的强度分布

参 考 文 献

- 1 Gobbi and Real, *Opt. Commun.*, **57**, 355 (1986)
- 2 M. Piche, *Appl. Opt.*, **22**, 1999 (1983)
- 3 Gobbi and Real, *Appl. Opt.*, **24**, 26 (1985)