

# 插入 Kerr 介质的 CO<sub>2</sub> 激光器的动力学行为的理论分析

陈历学 胡强生

(哈尔滨工业大学应用物理系, 150006)

**提要:** 建立了单模环腔 CO<sub>2</sub> 激光器的数学物理模型。线性稳定性分析的结果表明, 当 Kerr 介质的 Debye 弛豫速率远远大于激光工作原子的纵向弛豫速率时, 系统将在低光强区出现动力学不稳定性。数值计算的结果表明, 在恒定泵浦下, 激光输出为一系列脉冲, 基本上追随倍周期分岔的道路通向混沌。

**关键词:** CO<sub>2</sub> 激光器, 不稳定性, 光学双稳性

## Theoretical analysis of dynamic behaviors of a CO<sub>2</sub> laser with Kerr medium

Chen Lixue, Hu Qiangsheng

(Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin)

**Abstract:** The physical and mathematical model of a ring cavity monomode CO<sub>2</sub> laser is set up. The results of linearized stability analysis show that the dynamic instability on the region of low output intensity will appear only when the Debye relaxation rate exceeds greatly the longitudinal relaxation rate of atoms. The numerical calculation of time-dependent solutions reveals the periodic, period-doubling and chaotic behaviour.

**Key words:** CO<sub>2</sub> laser, instability, optical bistability

最近几年, 激光器的不稳定性研究引起了人们广泛的兴趣, 好几个学者曾经研究过 CO<sub>2</sub> 激光器的混沌行为。对 CO<sub>2</sub> 激光器进行内调制<sup>[1]</sup>和调制激光器的失谐量<sup>[2]</sup>, 导致了非自治系统的混沌行为。文献[3, 4]通过反馈调 Q 方式调节腔损耗, 文献[5]通过反馈调腔长方式调节失谐量, 导致了自治系统的混沌行为。本文的研究结果表明, 在 CO<sub>2</sub> 激光器中插入非线性 Kerr 介质, 同样可以实现失谐量的非线性调节, 导致混沌行为。

### 物 理 模 型

图 1 是典型的单模环腔 CO<sub>2</sub> 激光系统。在绝热跟随近似下, 环腔激光器中的场-原子满足下述 Maxwell-Bloch 方程:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} = \beta E D \quad (1a)$$

$$dD/dt = -\gamma_{\parallel} [D(1 + |E\mu/\hbar\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}|^2)D - 1] \quad (1b)$$

式中  $E$  和  $D$  分别表示腔内光场的复振幅和反转粒子数密度,  $\gamma_{\perp}$  和  $\gamma_{\parallel}$  分别是原子的横向与纵向弛豫速率,  $\beta$  是激光介质的增益系数,  $\mu$  为原子偶极距。

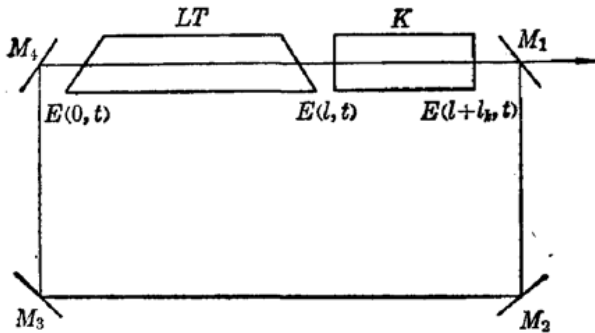


图1 插入 Kerr 介质的环腔单模 CO<sub>2</sub> 激光器

LT—CO<sub>2</sub> 放电管; K—Kerr 介质盒;  
M<sub>2</sub>、M<sub>3</sub>、M<sub>4</sub>—全反射镜; M<sub>1</sub>—反射率为  $R$  的反射镜

插入腔内的 Kerr 介质的折射率  $n$  的动力学过程满足下述 Debye 弛豫方程:

$$\tau(dn/dt) + n - n_0 = \alpha' \langle |E|^2 \rangle \quad (2)$$

式中  $\alpha'$  是与介质 Kerr 系数有关的常数,  $\tau$  为 Kerr 介质的 Debye 弛豫时间,  $n_0$  是 Kerr 介质的线性折射率,  $\langle \rangle$  表示短时间平均。

用  $E(0, t)$  表示激光介质的输入端面场, 用  $E(l, t)$  表示激光介质的输出端面场与 Kerr 介质的输入端面场, 用  $E(l+l_k, t)$  表示 Kerr 介质的输出端面场。假设介质的吸收系数可以忽略, 按照方程(2)的动力学过程, Kerr 介质只引起光场的相位变化, 考虑到环腔内的光场满足的边界条件得到

$$E(0, t) = \sqrt{R} E(l, t - \frac{\mathcal{L}-l}{c}) \exp \left[ i\phi(l+l_k, t - \frac{\mathcal{L}-(l+l_k)}{c}) \right] \quad (3)$$

在平均场近似对方程(1a)两端积分, 考虑到边界条件(3)得到

$$dI(t)/dt = -2k(1 - \sqrt{R} \cos \phi)I + 2GD I \quad (4a)$$

$$dD(t)/dt = -\gamma_{\parallel} [(1+I)D - 1] \quad (4b)$$

$$d\phi(t)/dt = -\phi + \phi_0 + \alpha I \quad (4c)$$

式中  $I(t) = (\mu/\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}\hbar)^2 \langle |E(l, t)|^2 \rangle$ ,  $k = c/l$ ,  $G = \beta/c$ ,  $\alpha = 2\pi l_k \alpha'/\lambda$ ,  $\phi_0 = 2n_0 \pi l_k/\lambda$  是 Kerr 介质的线性相移。上式是短腔近似的结果, 即  $(\mathcal{L}-l)/c \ll \tau$ ,  $\gamma_{\parallel}^{-1}$ 。上述三个非线性方程描述了插入 Kerr 介质的 CO<sub>2</sub> 激光器及其类式的 B 类激光器的动力学行为。

### 失稳分析与 Hopf 分岔

在稳态情况下, 由系统的动力学方程(4)可以得到用  $I_s$  表示的状态方程:

$$G = (1+I_s) [1 - \sqrt{R} \cos(\phi_0 + \alpha I_s)] \quad (5)$$

用  $I_1$ 、 $D_1$  和  $\phi_1$  分别表示相对于稳态值  $I_s$ 、 $D_s$  和  $\phi_s$  的小扰动振幅:

$$I = I_s + I_1 e^{\lambda t} \quad (6a)$$

$$D = D_s + D_1 e^{\lambda t} \quad (6b)$$

$$\phi = \phi_s + \phi_1 e^{\lambda t} \quad (6c)$$

代入到动力学方程(4)中得到下述本征值方程:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (7)$$

方程的各系数分别为 ( $I_s \neq 0$ )

$$a_1 = \tau^{-1} + \gamma_{\parallel} (1 + I_s) \quad (8a)$$

$$a_2 = \tau^{-1} \gamma_{\parallel} (1 + I_s) + 2G \gamma_{\parallel} I_s D_s + 2\alpha \tau^{-1} \sqrt{R} k I_s \sin \phi_s \quad (8b)$$

$$a_3 = 2G\gamma_I \tau^{-1} I_s D_s + 2k\alpha \tau^{-1} \gamma_I \sqrt{R} I_s (I_s + 1) \sin \phi_s \quad (8c)$$

### 1. Hopf 分岔点

当本征值  $\lambda$  满足  $\text{Re}(\lambda) = 0$ ,  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$  时, 发生 Hopf 分岔。为寻求 Hopf 分岔点, 我们假设  $\lambda = ib$ , 为某一纯虚数(其中  $b$  是一个非零的实数), 代入到方程(7)中, 得到下述关系:

$$b^2 = a_2 = a_3/a_1 \quad (9a)$$

$$a_2 > 0 \quad (9b)$$

$$a_3/a_2 > 0 \quad (9c)$$

将方程(8)代入到方程(9a), 得到

$$-2\alpha \tau^{-1} k I_s \sqrt{R} \sin \phi_s = a_1 \gamma_I (1 + I_s) + 2GI_s D_s \gamma_I^2 \tau (1 + I_s) \quad (10)$$

由于  $a_1 > 0$ , 从方程(8b)及(9b)得到:

$$-2\alpha \tau^{-1} k \sqrt{R} I_s \sin \phi_s < \tau^{-1} \gamma_I (1 + I_s) + 2G\gamma_I I_s D_s \quad (11)$$

将方程(10)代入到方程(11)中消去  $\sin \phi_s$  之后, 得到

$$2GI_s D_s [1 - \gamma_I \tau (1 + I_s)] > \gamma_I (1 + I_s)^2 > 0 \quad (12)$$

上述不等式导致下述两个失稳条件:

$$\tau^{-1} > \gamma_I (1 + I_s) \quad (13a)$$

$$G > \frac{\gamma_I (1 + I_s)^3}{2I_s [1 - \gamma_I \tau (1 + I_s)]} \quad (13b)$$

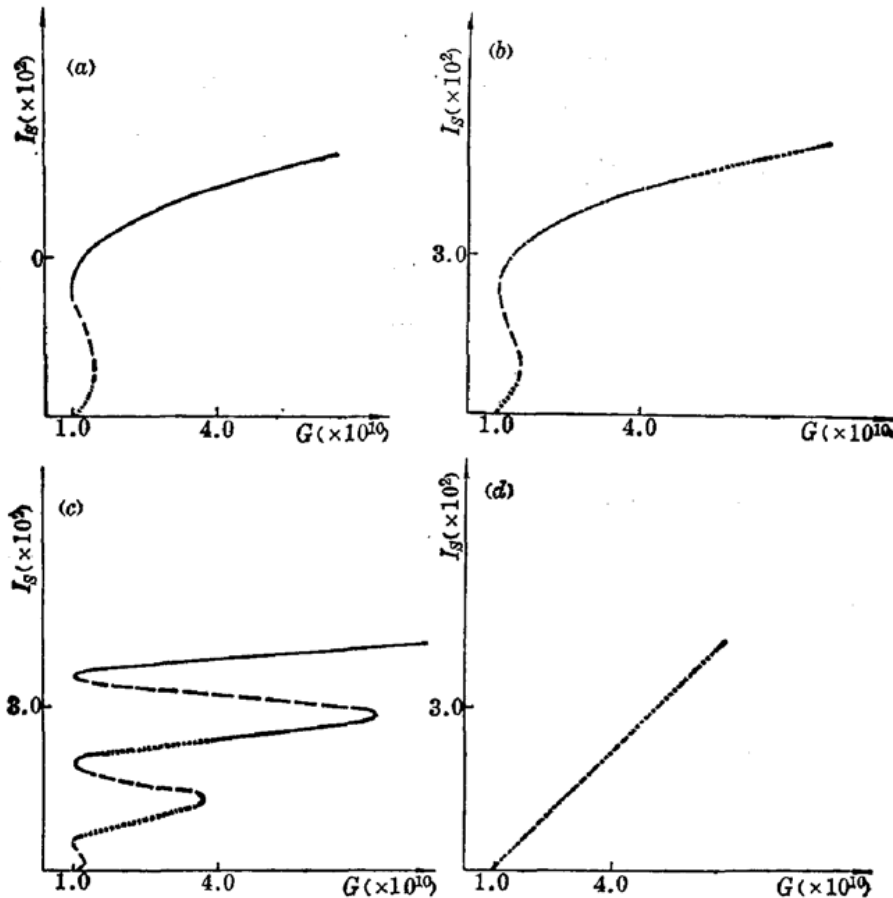


图2 在稳态曲线上的失稳区域图

图中点线表示动力学失稳区, 虚线表示静态负斜率失稳区, 细实线表示稳定区。( $K_0 = 3 \times 10^8$ ,  $R = 0.95$ ,  $\phi_0 = 4.71$ )

(a)  $\alpha = 0.013$ ,  $\gamma_I = 2.5 \times 10^5$ ,  $\tau^{-1} = 2.5 \times 10^7$ ; (b)  $\alpha = 0.013$ ,  $\gamma_I = 4.4 \times 10^3$ ,  $\tau^{-1} = 2.5 \times 10^7$ ;

(c)  $\alpha = 0.08$ ,  $\gamma_I = 2 \times 10^5$ ,  $\tau^{-1} = 2.5 \times 10^7$ ; (d)  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_I = 4.4 \times 10^3$ ,  $\tau^{-1} = 1.75 \times 10^7$

方程(13a)是系统失稳的必要条件,而方程(13b)是系统失稳的充要条件。

失稳条件(13a)的结果表明,要使系统失稳,非线性 Kerr 介质的 Debye 弛豫速率  $\tau^{-1}$  必须远远大于原子纵向弛豫速率  $\gamma_l$ ,随着失稳区域内激光光强  $I_s$  的增加,这一要求愈加强烈。

图 2 给出了  $I_s-G$  稳态曲线上的失稳区域。稳态曲线是按方程(5)绘制的,而失稳区域是按方程(13b)绘制的。图 2(a)和(b)是在  $\tau^{-1}/\gamma_l$  不同而其它条件相同时双稳运行情况下的失稳区域,失稳范围随着  $\tau^{-1}/\gamma_l$  的变小而变窄。图 2(c)则是强反馈时多稳运行的失稳区域,图 2(d)是弱反馈下的失稳区域。从图中可以看到,失稳往往发生在  $I_s$  比较小的区域。因为在给定  $\tau$  和  $\gamma_l$  的情况下,失稳条件(13a)要求稳态光强  $I_s$  满足

$$I_s < (\tau^{-1}/\gamma_l - 1) \equiv I_{\max} \quad (14)$$

即只有当  $I_s$  满足上述条件才可能出现不稳定性。当然满足方程(14)的所有区域并不一定都可以发生不稳定性,因方程(14)只是失稳必要条件(13a)的翻版而已。失稳的充要条件应当由方程(13b)给出。利用稳态方程(5),失稳条件(13b)可以改写为

$$\frac{1}{k(1-\sqrt{R}\cos\phi)} < \frac{2\alpha/\gamma_l}{\phi - (\phi_0 - \alpha)} - 2\tau \quad (15)$$

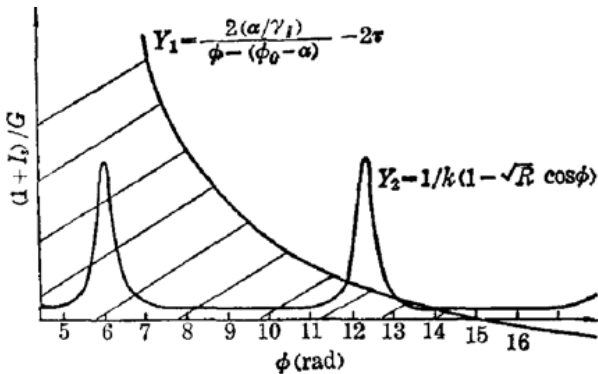


图 3 失稳条件的图解法示意图(参量同图2(d))

图 3 给出了方程(15)描述的失稳区域。方程(15)的左端是  $(1+I_s)/G$  的曲线,相当于混合光学双稳态中的透射率调制曲线;方程(15)的右端是  $\phi$  的倒数曲线。图 3 中的阴影区就是失稳区。从图中可以看到,在高  $\phi_s$  区不出现失稳,而  $\phi_s$  与  $I_s$  之间呈线性关系,因此在  $I_s-G$  图上,在高  $I_s$  区不出现失稳。

## 2. Hopf 分岔的频率特性

由方程(9a)的  $b^2 = a_2$ ,再利用方程(10)消去  $\sin\phi_s$  之后得到 Hopf 分岔频率  $\omega_p$  的表示式:

$$\omega_p^2 = b^2 = GI_s D_s \gamma_l [1 - \gamma_l \tau (1 + I_s)] \quad (16)$$

式中考虑了  $\tau G \gg I_s$  的近似条件。在  $I_s \gg 1$  的区域,  $I_s D_s \cong 1$ ,  $\omega_p^2$  可近似为

$$\omega_p^2 \cong \gamma_l k (1 - \sqrt{R} \cos \phi_s) I_s [1 - \gamma_l \tau I_s] \quad (17)$$

显然 Hopf 分岔的频率参量  $\omega_p^2$  主要由  $\gamma_l k$  决定,并随光强  $I_s$  的增加而增加。Kerr 系数参量  $\alpha$  和 Kerr 介质的 Debye 弛豫时间  $\tau$ ,虽然在一定程度上影响  $\omega_p$ ,但由于  $\alpha$  存在于  $\cos\phi$  之中,而  $\gamma_l \tau I_s < 1$ ,因而不起决定作用。

在  $I_s < 1$  的区域,  $I_s + 1 \sim 1$ ,  $\omega_p^2$  可近似为

$$\omega_p^2 \cong GI_s \gamma_l (1 - \gamma_l \tau) \cong \gamma_l k (1 - \cos \phi_0) I_s^2 \quad (18)$$

上式表明,在  $I_s < 1$  的区域, Hopf 分岔频率仍由  $\gamma_l k$  决定,并随着  $I_s$  的增加而增加,  $\tau$  和  $\alpha$  基本上不影响  $\omega_p$ 。

## 数 值 解

为了考察激光输出的动态行为,我们给出了按照动力学方程(4)的数值解。我们选择的各参量值及  $I_s-G$  稳态曲线如图 2(d)所示,这是弱 Kerr 系数参量的情形。选择的参量分别

为  $\tau^{-1} = 1.75 \times 10^7$ ,  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_I = 4.4 \times 10^3$ ,  $R = 0.95$ 。选择不同的  $I_s$  和  $G$  将得到不同的自脉动输出, 如图 4 所示。数值计算的程序是四阶龙格-库塔法。图 4(a) 给出了一个周期脉冲的波形, 对应的静态参量分别为  $I_s = 4.5$ ,  $G = 1.65376964 \times 10^9$ 。从图上可以看到, 脉冲的峰值大约为  $I_{\max} = 26.5$ , 脉冲的周期  $T_0 \cong 2.31 \times 10^{-6}$  s, 对应的频率为  $f_0 = 432.9$  kHz。图 4(b) 给出了一个周期加倍的脉冲波形, 对应的稳态参量分别为  $I_s = 4.625$ ,  $G = 1.69135325 \times 10^9$ 。从图上可以看到, 脉冲的高峰值约为 26.5, 低峰值约为 24.5, 周期  $T_2 \cong 4.51 \times 10^{-6}$ , 略小于图 4(a) 给出的周期脉冲波形的周期  $T_0$  的 2 倍。图 4(c) 给出了一个混沌波的脉冲波形, 对应的稳态参量分别为  $I_s = 4.65$ ,  $G = 1.69886997 \times 10^9$ 。从图上可以看到, 脉冲峰值大小不等, 脉冲的时间间隔亦大小不同。从数据上看, 脉冲宽度略大于图 4(a) 的周期波脉冲宽度, 脉冲间隔略小于图 4(a) 的周期波脉冲间隔。

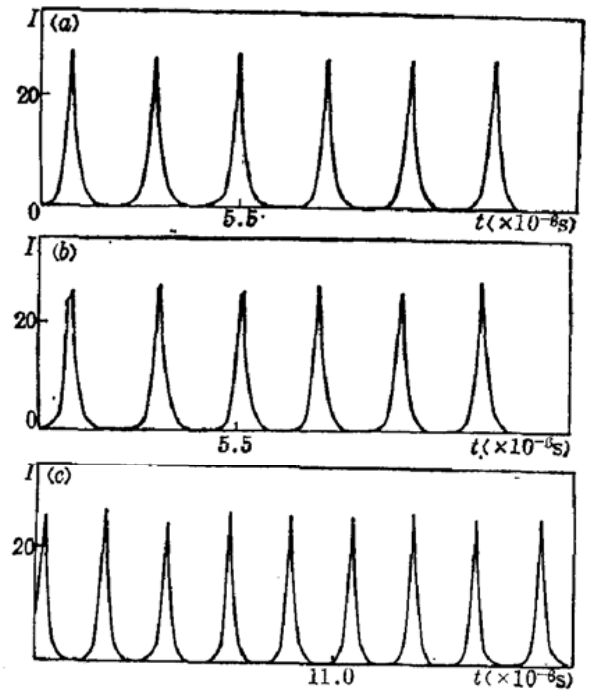


图 4 输出光强  $I$  随时间变化的波形图  
(a) 2P 波的周期脉冲波形; (b) 4P 波的周期加倍脉冲波形; (c) 混沌波的脉冲波形

## 讨 论

我们研究了插入 Kerr 介质的 CO<sub>2</sub> 激光器的动力学不稳定性, 这一结果对其它插入 Kerr 介质的 B 类单模激光器(如红宝石, YAG、半导体等)也是适用的。

动力学稳定性分析的结果表明, 当 Kerr 介质的 Debye 弛豫速率  $\tau^{-1}$  大于激光工作物质的纵向弛豫速率( $\tau^{-1} > \gamma_I$ )的情况下, 插入 Kerr 介质的 CO<sub>2</sub> 激光器可以导致动力学不稳定性, 甚至混沌行为。这一动力学不稳定性大多发生在光强  $I_s$  比较小的区域。系统的不稳定输出为一列脉冲, 基本上沿着倍周期分岔的方式进入混沌。

自脉动脉冲频率  $\omega_p$  不仅受到场衰减速率  $k$  以及原子反转衰减速率  $\gamma_I$  的影响, 而且随着光强  $I_s$  的增加而增加。因为光强的增加会导致非线性 Kerr 效应的增强, 增加相移的变化速度, 从而加速脉动过程。按照(17)式, 取图 4(a) 的参量数据, 计算结果得到的  $\omega_p = 2.437 \times 10^6$ , 对应的周期约为  $T_0 \cong 2.6 \times 10^{-6}$  s, 与图 4(a) 的数值解结果  $T_0 \cong 2.3 \times 10^{-6}$  s 符合得相当好。

作者衷心感谢洪晶教授、李淳飞教授的指导和帮助。

## 参 考 文 献

- 1 F. T. A. Arecchi, *Instabilities and chaos in quantum optics*, F. T. Arecchi *et al.*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1987) 9
- 2 J. R. Tredicce *et al.*, *Phys. Rev.*, **A34**, 2073(1986)
- 3 T. Midavaine *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 1989 (1985)
- 4 陈历学, 马爱群 *et al.*, *光学学报*, **8**(2), 132 (1988)
- 5 Lixue Chen *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**(5), 1160 (1988)