

## 等折射率面为旋转抛物面的梯度 折射率纤维透镜的成像特性

廖廷佛

(福建师范大学激光研究所, 350007)

邹义榕

(南平师专物理科廷佛)

**提要:** 本文研究一种等折射率面为旋转抛物面的梯度折射率纤维的光线传播和近轴成像特性。从光线方程出发, 得到光线轨迹的严格解析解, 并由此导出纤维透镜的等效焦距、主面、焦面位置计算公式, 以及高斯成像公式。

**关键词:** 梯度折射率, 纤维透镜, 光学成像。

### Imaging characteristics of a GRIN fiber lens with constant refractive-index surfaces of revolution paraboloids

*Liao Tingdi, Zou Yirong*

(Institute of Laser, Fujian Normal University, Fuzhou)

**Abstract:** The ray propagating and paraxial imaging characteristics of a GRIN fiber lens with constant refractive-index surfaces of revolution paraboloids are studied. The exact analytical solutions for the ray paths are obtained from differential equation on light ray. The equivalent focal length and the formulas for determining the principal planes, focal planes are derived and the Gaussian imaging formulas are also given.

**Key words:** gradient index, fiber lens, optical imaging

## 一、引言

梯度折射率光学是近十年来发展十分迅速的一门新兴学科。梯度折射率透镜的成像理论及应用的研究已引起许多国家的高度重视<sup>[1]</sup>。其中梯度折射率纤维透镜的光线传播及近轴成像特性是理论工作的重要研究课题之一。新近, 国内外不少学者对梯度折射率纤维透镜的成像问题作了探讨<sup>[2~9]</sup>。本文进一步研究了一种等折射率面为旋转抛物面的梯度折射率纤维透镜的光线传播和近轴成像特性。从光线方程出发, 得到了光线轨迹的严格解析解, 并由此导出纤维透镜的等效焦距、主面、焦面位置的计算公式, 以及近轴成像的高斯公式。

## 二、纤维的光线传播特性

考虑一种梯度折射率纤维透镜, 两平行平面端面位于  $z$  轴上的  $z=0$  和  $z=d$  处。其折射

收稿日期: 1988年11月7日。

\* 本课题系福建省自然科学基金资助项目。

率分布为<sup>[2]</sup>

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z) (x^2 + y^2)] \quad (1)$$

其中  $n_0$  为纤维轴心折射率,  $g(z)$  为纤维沿  $z$  轴的梯度参数, 由下式给出

$$g(z) = \frac{g_0}{(1 \pm z/L)^{1/2}} = \frac{g_0}{t^{1/2}} \quad (2)$$

式中  $g_0 = g(0)$ ,  $t = 1 \pm \frac{z}{L}$ ,  $L$  为抛物面顶点到入射端面  $z=0$  间的距离。由(1)、(2)知, 纤维的等折射率面方程为

$$g_0^2 (x^2 + y^2) = \left(1 \pm \frac{z}{L}\right) \cdot \text{const} \quad (3)$$

(3)式表明, 纤维的等折射率面为旋转抛物面。如图1所示。

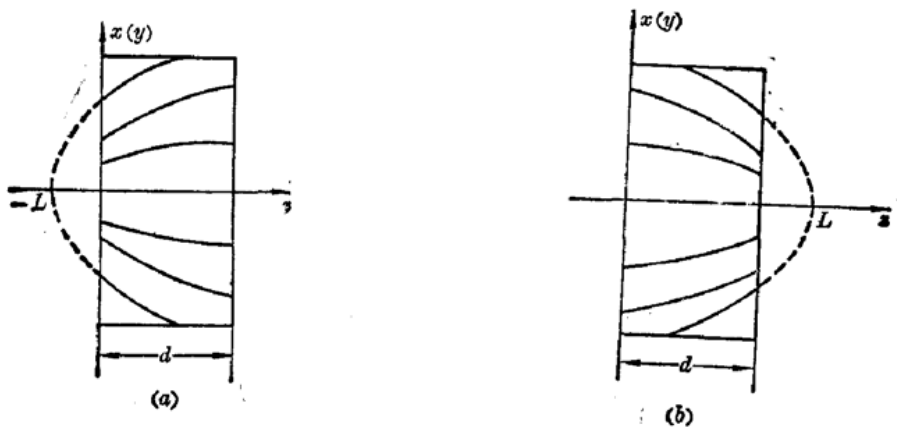


图1 梯度折射率纤维的等折射率面: 旋转抛物面

$$\text{对(a)为 } g_+(z) = \frac{g_0}{(1+z/L)^{1/2}}, \text{ 对(b)为 } g_-(z) = \frac{g_0}{(1-z/L)^{1/2}}$$

光线在梯度折射率介质中的传播满足光线微分方程

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (4)$$

在近轴条件下,  $ds \approx dz$ , 再计及折射率沿轴向的缓变条件, 即  $\frac{\partial n}{\partial z} \approx 0$ , 则得  $x-z$  面内的光线方程:

$$\ddot{x}(z) + g^2(z)x(z) = 0 \quad (5)$$

其初始条件为

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = P_0 \quad (6)$$

引入函数  $W(t)$ ,

$$x(z) = \sqrt{t} W(t) \quad (7)$$

方程(5)可化为

$$W''(t) + \frac{1}{t} W'(t) + \left[ \frac{(g_0 L)^2}{t} - \frac{1}{4t^2} \right] W(t) = 0 \quad (8)$$

再作变量替换

$$\xi = \sqrt{t} \quad \text{或} \quad t = \xi^2 \quad (9)$$

代入方程(8)得:

$$W''(\xi) + \frac{1}{\xi} W'(\xi) + \left(4b^2 - \frac{1}{\xi^2}\right) W(\xi) = 0 \quad (10)$$

方程(10)的一般解为

$$W(\xi) = AJ_1(2b\xi) + BY_1(2b\xi) \quad (11)$$

式中  $b = g_0L$ ,  $J_1, Y_1$  为第一、二类一阶贝塞尔函数。由(7), 方程(5)的解, 即光线轨迹一般解为

$$x(z) = \xi [AJ_1(2b\xi) + BY_1(2b\xi)] \quad (12)$$

斜率方程为

$$\dot{x}(z) = \pm g_0 \cdot [AJ_0(2b\xi) + BY_0(2b\xi)] \quad (13)$$

将(12)、(13)代入初始条件(6)确定系数  $B$  和  $A$ , 再代入(12)、(13)式整理得

$$x(z) = \frac{1}{w_0} \xi \left\{ [Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi)] x_0 \right. \\ \left. \pm \frac{P_0}{g_0} [J_1(2b)Y_1(2b\xi) - Y_1(2b)J_1(2b\xi)] \right\} \quad (14)$$

$$\dot{x}(z) = \frac{1}{w_0} \left\{ \pm g_0 [Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)] x_0 \right. \\ \left. + P_0 [J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_1(2b\xi)] \right\}^{-1} \quad (15)$$

式中

$$w_0 = J_1(2b)Y_0(2b) - J_0(2b)Y_1(2b) = \frac{1}{\pi b}$$

(14)、(15)式也可表示为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ n_0 \dot{x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ n_0 P_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中矩阵元  $M_1, M_2, M_3, M_4$  为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\xi}{w_0} [Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi)] \\ M_2 &= \pm \frac{\xi}{n_0 g_0 w_0} [J_1(2b)Y_1(2b\xi) - Y_1(2b)J_1(2b\xi)] \\ M_3 &= \pm \frac{n_0 g_0}{w_0} [Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)] \\ M_4 &= \frac{1}{w_0} [J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi)] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

显然  $M_1, M_2, M_3, M_4$  满足  $M_1 M_4 - M_2 M_3 = 1$ 。

考虑两条特定光线, 光线  $I$  平行于光轴入射, 其初始条件为  $x_I(0) = x_0, \dot{x}_I(0) = 0$ ; 光线  $II$  与  $z$  轴成一倾角入射, 其初始条件为  $x_{II}(0) = 0, \dot{x}_{II}(0) = P_0$ 。由(14)、(15)式, 它们的轨迹方程和斜率方程分别为

$$x_I(z) = \frac{x_0}{w_0} \xi [Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi)] \quad (18)$$

$$\dot{x}_I(z) = \pm \frac{g_0}{w_0} [Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)] \quad (19)$$

和

$$x_{II}(z) = \pm \frac{P_0}{g_0 w_0} \cdot \xi [J_1(2b)Y_1(2b\xi) - Y_1(2b)J_1(2b\xi)] \quad (20)$$

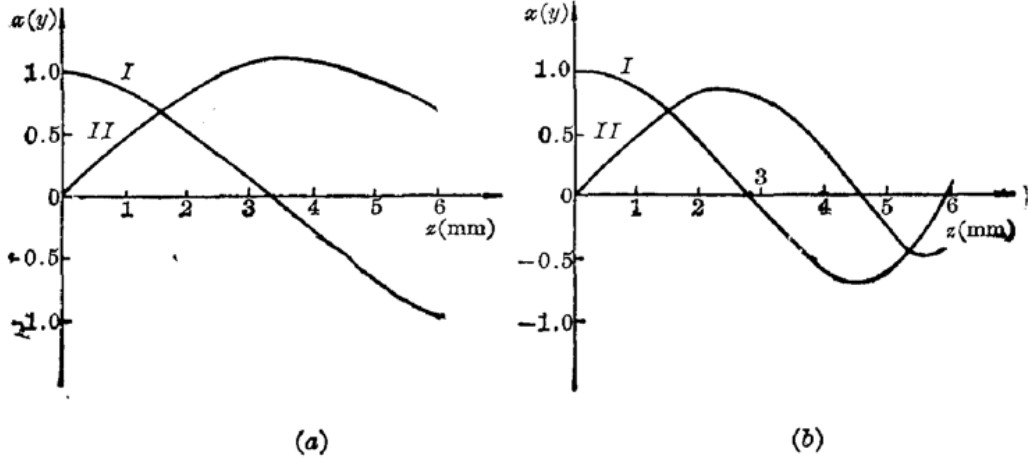


图2 梯度折射率纤维中光线的传输轨迹 ( $g_0=0.5, L=6\text{ mm}$ )

$$(a) \quad g_+(z) = \frac{g_0}{(1+z/L)^2}, \quad (b) \quad g_-(z) = \frac{g_0}{(1-z/L)^2}$$

$$\dot{x}_{II}(z) = \frac{P_0}{w_0} \cdot [J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi)] \quad (21)$$

图 2 所示为光线  $I$ 、 $II$  在纤维中的传播轨迹。由(18)~(21)式知，这些轨迹呈贝塞尔函数的衰减，或递增振荡特征。

### 三、纤维的近轴成像特性

纤维的成像原理如图 3 所示。设物体  $AB$  位于纤维  $z=0$  端面前  $l_0$  处，物高为  $x_0$ ，经透镜所成的像  $A'B'$  位于  $z=d$  端面后  $l'_0$  处。像高为  $x$ ， $A$ 、 $A'$  位于光轴上。

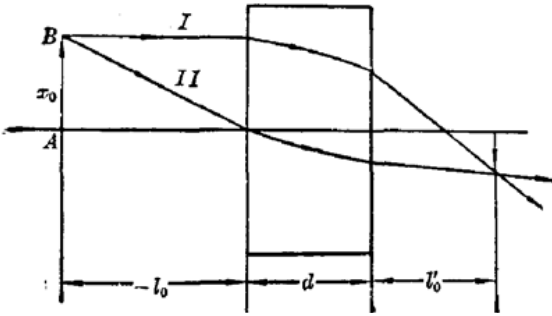


图 3 梯度折射率纤维的成像原理

考虑从物体上  $B$  点发出的两条光线  $I$  和  $II$ ，其轨迹由(18)、(19)和(20)、(21)给出。由图知，光线  $II$  的斜率为  $P_0 = \frac{x_0}{n_0 l_0}$ 。像的位置和大小可由以下公式计算<sup>[10]</sup>

$$l'_0 = \frac{x_{II} - x_I}{n_0(\dot{x}_I - \dot{x}_{II})} \quad (22)$$

$$x = \frac{\dot{x}_I x_{II} - x_I \dot{x}_{II}}{\dot{x}_I - \dot{x}_{II}} \quad (23)$$

将(18)~(21)式及  $P_0 = \frac{x_0}{n_0 l_0}$  代入(22)、(23)得像距  $l'_0$  及像的放大率  $\beta = \frac{x}{x_0}$

$$l'_0 = \frac{\xi}{n_0 g_0} \frac{\left\{ \begin{array}{l} -n_0 l_0 g_0 [Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi)] \\ \pm [J_1(2b)Y_1(2b\xi) - Y_1(2b)J_1(2b\xi)] \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} -[J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi)] \\ \pm n_0 l_0 g_0 [Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)] \end{array} \right\}} \quad (24)$$

$$\beta = -w_0 \left\{ -[J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi)] \pm n_0 l_0 g_0 [Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)] \right\}^{-1} \quad (25)$$

当  $l'_0 > 0$  时成实像,  $l'_0 < 0$  时成虚像;  $\beta > 0$  为正立像,  $\beta < 0$  为倒立像;  $|\beta| > 1$  为放大像,  $|\beta| < 1$  为缩小像。

由(24)式, 令  $l'_0 \rightarrow \infty$  得成像在无限远的物距, 即物方焦点位置

$$l_f = \pm \frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi)}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} \quad (26)$$

由(25)式, 令  $\beta = 1$  得成像在像方主面的物距, 即物方主面位置:

$$l_h = \pm \frac{1}{n_0 g_0} \cdot \frac{J_1(2b)Y_0(2b\xi) - Y_1(2b)J_0(2b\xi) - w_0}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} \quad (27)$$

所以, 物方焦距为

$$f = l_f - l_h = \pm \frac{w_0}{n_0 g_0} \cdot \frac{1}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} \quad (28)$$

由(24)式, 令  $l_0 \rightarrow \infty$  得像方焦点位置

$$l'_f = \mp \frac{\xi}{n_0 g_0} \cdot \frac{Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi)}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} \quad (29)$$

将  $l_0 = l_h$  代入(24)得像方主面位置

$$l'_h = \mp \frac{\xi}{n_0 g_0} \cdot \frac{Y_0(2b)J_1(2b\xi) - J_0(2b)Y_1(2b\xi) - w_0/\xi}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} \quad (30)$$

于是, 像方焦距为

$$f' = l'_f - l'_h = \mp \frac{w_0}{n_0 g_0} \cdot \frac{1}{Y_0(2b)J_0(2b\xi) - J_0(2b)Y_0(2b\xi)} = -f \quad (31)$$

对给定厚度  $d$  的纤维, 以上各式中

$$z = d, \quad \xi = \xi_{\pm}(d) = \left(1 \pm \frac{d}{L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果物距和像距也以主面为基准计算, 即

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 - l_h \\ l' &= l'_0 - l'_h \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

则物像关系式(24)可化为如下高斯公式

$$1/l' - 1/l = 1/f' \quad (33)$$

综上所述, 我们研究了一种旋转抛物等折射率面的梯度折射率纤维透镜的光线传播和近轴成像特性。在折射率沿轴向缓变条件下得到近轴光线轨迹的严格解析解。这些轨迹呈贝塞尔函数的衰减或递增振荡特征。文中给出了纤维透镜的等效焦距、主面、焦面计算公式以及高斯成像公式。利用这些公式可进行纤维透镜的几何光学成像的计算。

### 参 考 文 献

- 1 E. W. Marchand., *Appl. Opt.*, **25**(19), 3335(1986)
- 2 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **23**(7), 1107~1109(1984)
- 3 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **24**(24), 4375~4378(1985)
- 4 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **24**(24), 4379~4382(1985)
- 5 C. Gomez-Reino *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(19), 3418~3424(1986)
- 6 殷宗敏 *et al.*, *物理学报*, **30**(12), 1603~1608(1981)
- 7 乔亚天, *光学学报*, **4**(1), 89~92(1984)
- 8 王安 *et al.*, *光学学报*, **6**(2), 176~180(1986)
- 9 程希望, *光学学报*, **7**(12), 1133~1135(1987)
- 10 廖廷傑, *中国激光*, **16**(5), 267~271(1989)