



## 光致折变晶体中相位光栅的相位移动的物理作用

徐 怀 方 金 元 望

(上海师范大学物理系, 200234)

### Physical effect of phase shift of phase grating in photorefractive crystals

*Xu Huai-fang, Jin Yuan-wang*

(Department of Physics, Shanghai Teachers' University, Shanghai)

**Abstract:** It is proved that there exists  $\pi/2$  phase difference between the transmitted beam and the diffracted (or reflected) beam of one incident wave when they leave a thick grating (or another beam splitter). It is the phase difference that makes energy coupling between input-beam possible when there is the phase shift between phase grating and the interference pattern of the incident wave in the photorefractive crystal, and the diffraction efficiency of phase grating and modulation amplitude of photorefractive index are calculated based on the theory.

**Key words:** photorefractive crystal, phase grating, Ce-SBN

在光致折变晶体(如SBN, BaTiO<sub>3</sub>等)中发生两波混频及能量耦合<sup>[1~3]</sup>是由于晶体干涉场内产生了相对于干涉场有相位移动的折射率光栅(相位光栅),这已被实验和理论证实。如果仅有两波混频产生的相位光栅,而此光栅相对于干涉场并无相位移动,或相位移动量较小(不足 $\pi/2$ ),此时不会发生波能量耦合或耦合极微弱。1981年A. Yariv<sup>[3]</sup>用耦合波方程从数学上解决了这个问题。

如果参加混频的第  $j$  个波的电场为

$$E_j = A_j(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{K}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + c.c$$

则两波混频的稳态耦合波方程为(绝热近似)

$$2c/\omega \cdot \cos \theta_1 \cdot dA_1/dz = -in_r e^{i\phi_1} A_2^* A_1 A_2 / I_0$$

$$2c/\omega \cdot \cos \theta_2 \cdot dA_2/dz = -in_r e^{-i\phi_1} A_2 \cdot A_1^* \cdot A_1 / I_0$$

式中 $\theta_1, \theta_2$ 分别是波1、波2在晶体中与 $z$ 轴的夹角, $z$ 轴一般取晶轴方向或介质表面法线方向。 $I_0 = \sum_{j=1}^2 |A_j|^2$ 。 $n_r$ 是光致折射率变化的振幅,为正实数,表达式因材料而异。光致折变光栅相对于入射波的干涉场所产生的相位移动( $P, S$ ),当 $\phi_1 = 0$ ,耦合为0,当 $\phi_1 = \pi/2$ ,有最大耦合。本文对这个问题给出物理解释并推出有用的结果。

### 一、厚相位光栅的透射波与衍射波之间有 $\pi/2$ 的相位差

令厚光栅的光栅矢量为  $K$ ,  $K=2\pi/\Lambda$ ,  $\Lambda$  为光栅的空间周期。  $A$  为满足布拉格条件的入射光(电场振幅也为  $A$ ), 如图 1 所示。  $A$  经光栅后分为透射光  $A_t$ (电场振幅也为  $A_t$ )及衍射光  $A_d$ (电场振幅为  $A_d$ ), 晶体两表面的反射均不考虑。因而有

$$K = K_A - K_{A_d} \tag{1}$$

$K_A, K_{A_d}$  分别为  $A$  及  $A_d$  的波矢。  $\theta$  为  $K_A$  与光栅平面法线之间夹角, 则有

$$\Lambda = \lambda / 2 \sin \theta \tag{2}$$

由于是厚光栅, 高阶衍射可以忽略, 于是入射波的能量分成透射波  $A_t$  和衍射波  $A_d$  的能量, 因为  $A, A_t, A_d$  三者有相同的束截面, 故忽略吸收后有

$$A^2 = A_t^2 + A_d^2 \tag{3}$$

假设  $A_t$  波与  $A_d$  波之间在离开光栅时的位相差是  $\alpha$ , 并假设  $A$  波与  $A_d$  波之间在离开光栅时的位相差为  $\alpha'$ ,  $\alpha'$  与  $\alpha$  的相位关系如图 2 所示。

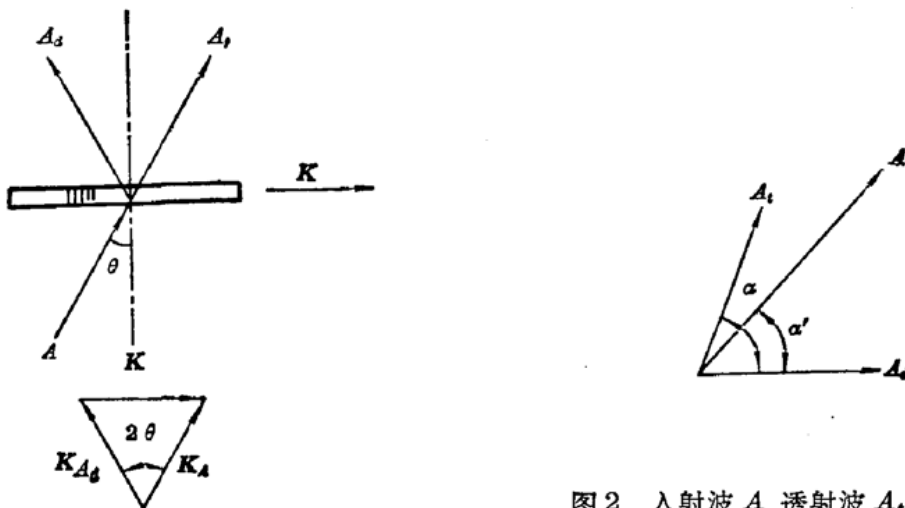


图 1 波矢和光栅矢量之间的关系

图 2 入射波  $A$ 、透射波  $A_t$  和衍射波  $A_d$  之间的相对位相关系

假定在  $A$  的对称方向入射一束  $A$  的相干波  $B$ , 且让  $B=A$ ( $B$  波的电场振幅也为  $B$ )。必然地  $B$  也产生  $B_t$ (透射波)和  $B_d$ (衍射波)。且有

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= B_t^2 + B_d^2 \\ \therefore A=B, \text{ 必有 } A_t &= B_t, A_d = B_d \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$A_d$  与  $B_t$  及  $A_t$  与  $B_d$  必然发生相干现象(见图 3)。

当光栅条纹与  $A, B$  干涉条纹重合, 即  $\phi_1=0$  时(由于入射波  $A$  符合布拉格条件, 必然有  $A, B$  波相干条纹的空间周期与光栅的空间周期相同, 等于  $\Lambda$ ), 这样  $A, B$  波到达光栅(如图 4(a)中的  $O$  点)时的位相是相同的(图 4(a)中的直条纹表示干涉极大处的位置), 因此就有图 4(b)所示的相位关系:  $A_t$  与  $B_d$  相干,  $A_d$  与  $B_t$  相干, 可见它们之间均有相位差  $\alpha$ 。由于对称, 相干后的结果应该仍对称, 所以有

$$A_t^2 + B_d^2 + 2A_t B_d \cdot \cos \alpha = B_t^2 + A_d^2 + 2B_t \cdot A_d \cdot \cos \alpha = A^2 = B^2 \tag{5}$$

等式(5)的右边为  $A^2$  和  $B^2$  是由于能量守恒及对称。将(4)、(3)代入(5)得到

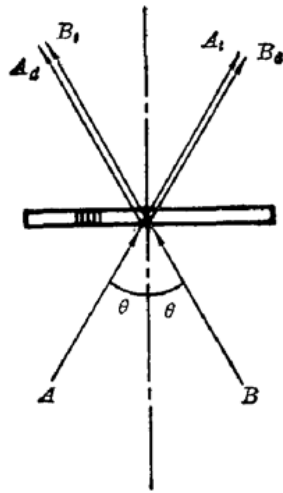
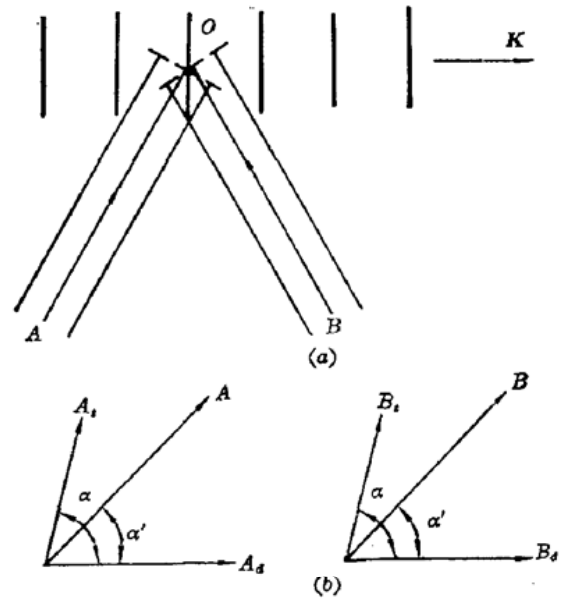


图 3 入射波  $A$  和  $B$  各自分成透射波和衍射波, 它们彼此相互干涉



(a) 当  $\phi_1=0$ , 在光栅的  $O$  点, 光波  $A$  与  $B$  有相同的位相;  
(b) 当  $\phi_1=0$ ,  $A, B, A_t, A_d, B_t, B_d$  各波之间在光栅  $O$  点处的位相关系

图 4

$$A_t^2 + A_d^2 - 2A_t \cdot A_d \cdot \cos \alpha = A_i^2 + A_d^2$$

$$\therefore \cos \alpha = 0, \alpha = \pm \pi/2$$

(6)

这就证明了厚光栅的透射光与衍射光之间有  $\pi/2$  的相差。此相差与  $B$  无关, 是光栅本身的属性, 这个规律不仅普遍适用, 而且对于有相同出射截面且左右使用对称的任意无损耗分束器也适用, 只是衍射波改成反射波, 证明方法与上述相同。

## 二、当 $\phi_1 = \pi/2$ 时两波耦合有最大值的证明

假设图 5 中实线表示光干涉场电场极大值所在平面, 虚线表示相位光栅中折射率变化的极大(或极小)值所在平面, 该图是对应着  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  的情况。 $A, B$  波到达  $O$  点时有相同的位相, 而到达  $O'$  点时的两波相位差为

$$\xi = \frac{OO' - O'O''}{\lambda} \cdot 2\pi \quad OO' = \frac{\Lambda/4}{\sin \theta}, \quad O'O'' = OO' \cdot \cos 2\theta$$

$$\therefore \xi = \frac{2\pi}{\lambda} (1 - \cos 2\theta) \frac{\Lambda/4}{\sin \theta} = \pi/2,$$

当  $A, B$  波在位相光栅虚线所示的面相遇时, 将分成  $A_t, A_d, B_t, B_d$ , 它们的位相关系如图 6 所示。 $A$  比  $B$  落后  $\pi/2$ 。在图 6(a) 中  $B_t, A_d$  反相,  $B_d, A_t$  同相 (对应  $\alpha = +\pi/2$ ), 能量向  $A_t$  方向转移。而在图 6(b) 中  $B_t, A_d$  同相,  $B_d, A_t$  反相 (对应  $\alpha = -\pi/2$ ), 能量向  $A_d$  方向转移。这两种情况下都发生能量最大转移。从实验情况看  $BaTiO_3$  的能量转移方向, 正是图 6(a) 所示的方向<sup>[4]</sup>, 因而可以断定  $\alpha = \pi/2$ 。当位相光栅的相位移动  $\phi_1 \neq \pi/2$  时,  $A, B$  在光栅面相遇时的相差  $\xi \neq \pi/2$ , 这时  $A_t, B_d$  及  $A_d, B_t$  的相位关系如图 7 所示。 $B_t, A_d$  干涉后的光强是

$$I = B_t^2 + A_d^2 - 2A_d B_t \cdot \cos \left( \xi - \frac{\pi}{2} \right) \tag{8}$$

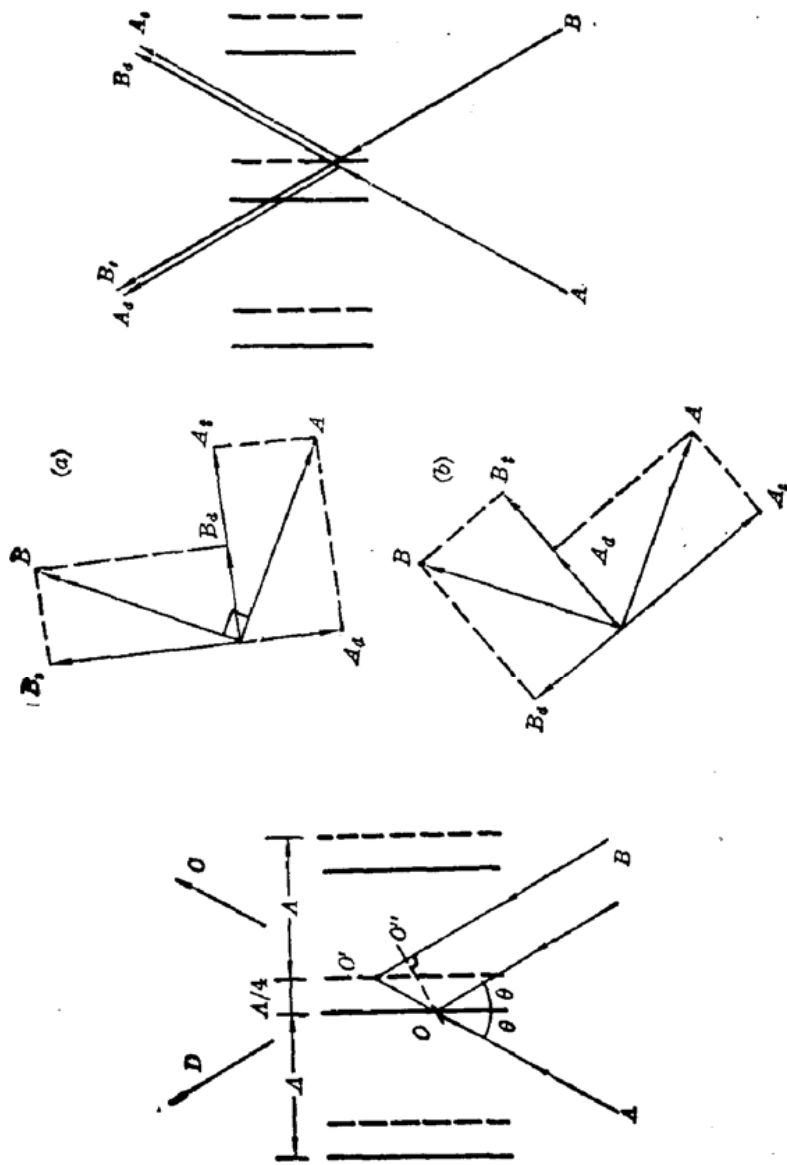


图 5 当  $\phi_1 = \pi/2$ , 在光栅  $O$  处, 光波  $A$  与  $B$  之间的位相差

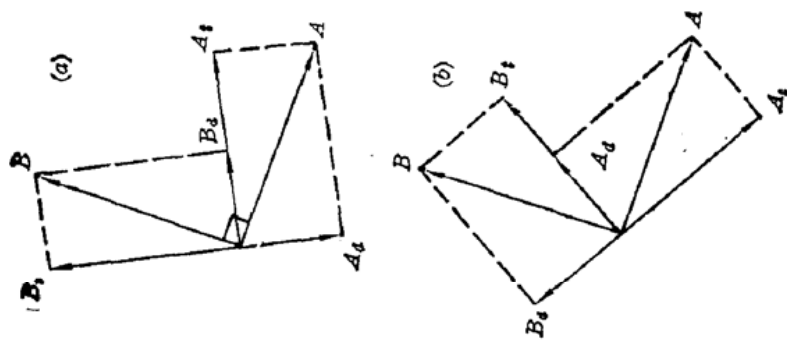


图 6 当  $\phi_1 = \pi/2$  时波  $A$  与波  $B$  干涉的情况

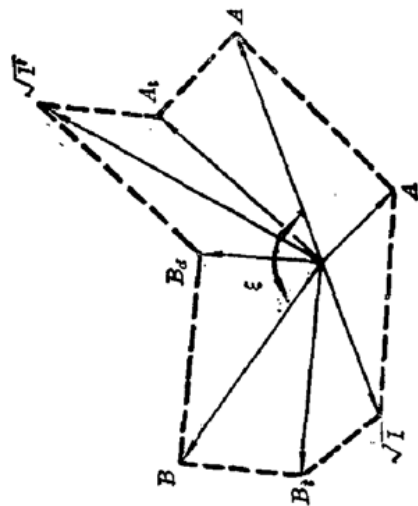


图 7 当  $\phi_1 \neq \pi/2$  时, 波  $A$  与波  $B$  干涉的情况

当  $\xi = \pi/2$  时,  $I$  达极小。  $B_d, A_t$  干涉后的光强是

$$I' = B_d^2 + A_t^2 + 2B_d A_t \cos(\xi - \pi/2) \tag{9}$$

当  $\xi = \pi/2$  时,  $I'$  达极大, 且可证明  $\xi$  就是  $\phi_1$ 。这就证明了当位相光栅相对于干涉花样相移  $\pi/2$  时能量耦合有极大值。

### 三、实验验证

实验装置如图 8 所示, 我们用光致折变晶体 Ce-SBN 建立相位光栅。由于相位光栅就是由于相交的入射光的干涉场感应而生成, 所以相位光栅的空间周期自然就等于干涉场的条纹空间周期, 因此这个位相光栅对于生成它的入射光是必然满足布拉格条件的且对任意  $\theta$  都成立。入射光为 mW 级 632.8 nm 氦-氖激光, 线偏振方向在纸平面(非常光)。我们移动全反射棱镜  $P$ (如图 8 箭头所示), 能够发现能量耦合方向由原来的  $I_C$  方向变到了  $I_D$  方向, 即原来由于双光束耦合  $I_C$  将增强, 而现在  $I_C$  减小而  $I_D$  反而增大。如在同一方向继续移动棱镜  $P$ , 则意味着相位光栅与干涉场之间的相位移( $PS$ )继续增大, 当棱镜  $P$  移动的速度在 1 mm/s 左右时, 位相光栅来不及改变, 可将它视作一个固定的光栅(因 Ce-SBN 晶体在 mW 级 632.8 nm 激光照射下产生和擦除光致折变光栅的时间约 0.1 s 数量级)。我们则可发现能量耦合方向在  $I_C, I_D$  之间周期性地变来变去, 如图 9 所示。这些结果被方程(8)、(9)所预言。如果实验中的晶体改成分束器, 实验结果是一样的, 但它的振荡曲线是不衰减的。前者衰减是因为相位光栅被变化的干涉条纹逐步擦除的缘故。现在, 如果光束强度  $I_A, I_B, I_C, I_D$  已知, 则衍射效率  $\eta$  和晶体折射率变化振幅  $n_t$  可以求出了。定义:  $\eta = A_d^2/A^2$ , 则透过率  $T = 1 - \eta = A_t^2/A^2$ (忽略吸收), 故有

$$A_d = A \sqrt{\eta}, \quad A_t = A \sqrt{1-\eta}, \quad B_d = B \sqrt{\eta}, \quad B_t = B \sqrt{1-\eta}$$

从图 6(a), 得到

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{\eta} B + \sqrt{1-\eta} A)^2 &= C^2 \\ (\sqrt{\eta} A - \sqrt{1-\eta} B)^2 &= D^2 \\ A^2 &= I_A, \quad B^2 = I_B, \quad C^2 = I_C, \quad D^2 = I_D \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

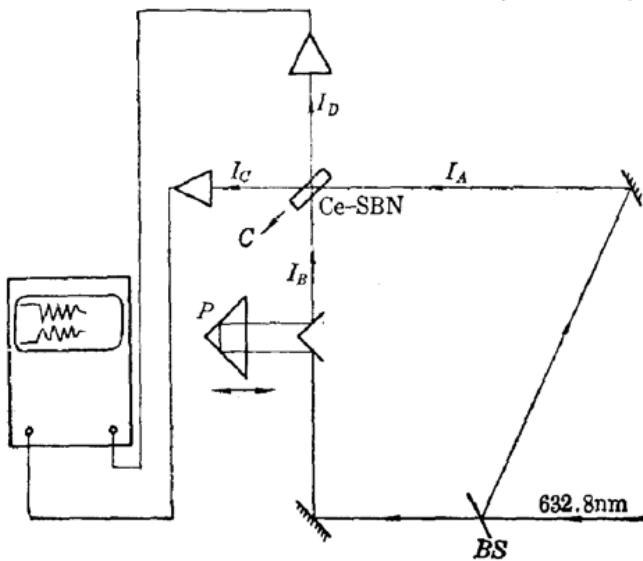


图 8 实验装置

其中晶体是 Ce-SBN ( $\text{Sr}_{1-x}\text{Ba}_x\text{Nb}_2\text{O}_6$ ), Ce 掺杂浓度是 0.1Wt%,  $n=0.48$ , 晶体厚度为 0.2 cm

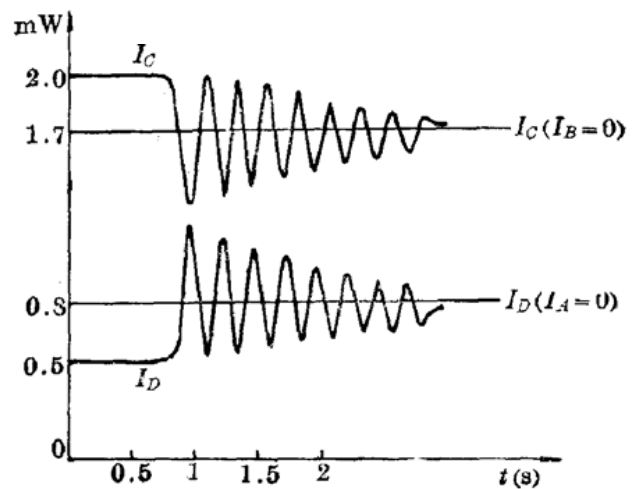


图 9 实验记录

根据方程(10), 可解出  $\eta$ :

$$\eta = [I_B I_C + I_A I_D \pm 2 \sqrt{I_A I_B I_C I_D}] / (I_A + I_B)^2 \quad (11)$$

(当  $\sqrt{\eta} A > \sqrt{1-\eta} B$ , 用“+”, 当  $\sqrt{\eta} A < \sqrt{1-\eta} B$ , 用“-”)。根据[5], 有

$$\eta = \sin^2(\sigma n_r d / \lambda \cos \theta) \quad (12)$$

则可以求出  $n_r$  来。

当考虑吸收时, 有

$$I_A = I_A' \exp(\alpha \cdot d / \cos \theta), \quad I_B = I_B' \exp(\alpha \cdot d / \cos \theta) \quad (13)$$

$I_A'$ 、 $I_B'$  是在没有位相光栅时光束  $A$ 、 $B$  的透射光强。根据能量守恒定律, 有

$$I_A' = A_i^2 + A_d^2; \quad I_B' = B_i^2 + B_d^2 \quad (14)$$

则  $\eta$  及  $T$  的定义将变成

$$\eta = A_d^2 / A^2; \quad T = A_i^2 / A^2 = \exp(-\alpha d / \cos \theta) - \eta$$

$\eta$  的解形式与方程(11)相同, 但方程(12)变成<sup>[5]</sup>

$$\eta = \exp(-\alpha \cdot d / \cos \theta) \sin^2(\sigma d n_r / \lambda \cdot \cos \theta) \quad (15)$$

这样, 我们能够获得较好的近似。

本文实验所用晶体系上海硅酸盐研究所提供, 在此表示深切的谢意。

### 参 考 文 献

- 1 J. Feinberg *et al.*, *Opt. Lett.* **5**, 519(1980)
- 2 N. V. Kukhtarev *et al.*, *Ferroelectrics*, **22**, 949(1979)
- 3 A. Yariv, *Opt. Lett.*, **6**(11), 519(1981)
- 4 Robert A. Fisher, *Optical Phase Conjugation*, Academic Press, New York, London, 1983, Chapter 11.
- 5 H. Kogelnik, *Bell Syst. Tech. J.*, **48**, 2909(1969)

(收稿日期: 1989年1月6日)

## 联合变换用于指纹鉴定

曹俊卿 沈晓庆 陆霞芳

(上海机械学院, 200093)

### Identification of fingerprints based on joint transform

Cao Junqing, Shen Xiaoqing, Lu Xiafang

(Shanghai Institute of Mechanical Engineering, Shanghai)

**Abstract:** Identification of fingerprints is realized by means of joint transform and satisfactory results are obtained experimentally on a sample of  $5 \times 5 \text{mm}^2$ .

**Key words:** joint transform, optical correlation, identification of fingerprint

### 一、引 言

联合变换<sup>[1]</sup>是基于相关运算的一种光学技术, 它为特征识别提供了简便实用的方法。文