5 C. H. Corliss, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **80A**(1), 1(1976)
6 C. H. Corliss, W. Bozman, Nat. Bur. Stand. (u. s) Monogr, **53**, (1962)
7 J.P. Declaux, *Computer Phys. Commun.*, **9**, 31(1975)
8 I. P. Grant, *Adv. Physics*, **19**, 747(1970)
9 N. C. Pyper, I. P. Grant, *J. Chem. Soc, Faraday Trans II*, **74**(11), 1885(1978)
10 K. Rajnak, *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 1314(1977)

(收稿日期：1987 年 12 月 25 日)

波束反射场的复射线分析**

阮颖铮　周伟蜀*

(成都电讯工程学院)

Complex ray analysis of beam reflection fields

Ruan Yingzheng, Zhou Weishu

(Chengdu Institute of Radio Engineering, Chengdu)

提要：利用复射线理论研究高斯波束在两种媒质分界面上的反射。数值分析和实验结果表明，复射线理论是处理波束场问题的一种有效方法。

关键词：复射线，波束，反射

一、引　言

当高斯形波束(如单模激光射束、雷达天线主波束等)从光密媒质投射到光疏媒质界面上时，由于高斯波束场横向分布的指数衰减特性和传播路径的非均匀扩散特性，使投射到分界面上各点处的入射场具有不同的振幅和入射角，几何光学方法分析各条射线的反射场，再根据惠更斯-菲涅耳原理叠加综合而求得高斯波束的反射场，则计算变得复杂。本文根据复射线理论，从二维复源点场的平面波谱积分表达式出发，利用最陡下降法对反射场积分进行渐近估值，分别导出了过渡区外的反射场公式和过渡区内的渐近公式，并给出了这些公式的物理解释，用这些公式所得的计算结果与单模激光反射场的实验结果进行比较，证明了用复射线理论处理高斯波束的传播和散射是可行的。

二、理 论 分 析

本文研究如图 1 所示的二维结构($\partial/\partial x \equiv 0$)，其中 $z=0$ 的平面将空间分为两个半无限大的均匀媒质区域。区域 $I(z<0)$ 为光密媒质， $n_1=\sqrt{\varepsilon_1}$；区域 II 为光疏媒质，$n_2=\sqrt{\varepsilon_2}<n_1$。根据复射线理论[1]，二维复源点 $\tilde{S}(y_s, \tilde{z}_s)$ 在实空间代表了一个腰在实源点 $S(y_s, z_s)$ 的二维高斯波束，波束的宽度和方向由“波束矢量” $\boldsymbol{b}$ 这一参数所确定，$\boldsymbol{b}$ 矢量同时决定了复源点的复坐标：

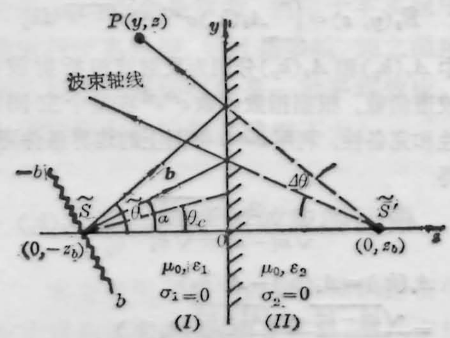

图 1　描述反射场的坐标系统

$$\left.\begin{aligned}\tilde{y}_s&=y_s+jb\sin\alpha=0+jb\sin\alpha\\ \tilde{z}_s&=z_s+j\,b\cos\alpha=-z_b+jb\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 b 为波束矢量 $\boldsymbol{b}$ 的模，称为波束宽度参量，α 表示 $\boldsymbol{b}$ 的方向，称为波束指向角(即波束轴线与 z 轴的夹角)。

---

*现在上海市电子物理研究所。

**本项研究分别由国家教委博士点专项科研基金和高等学校重点学科建设基金提供资助。

根据复射线理论[1,2]，复源点场可直接由对应的实源点场量公式解析延拓而成，对于媒质Ⅰ中观察点 $P(y,z)$ 处的直射波，由线源格林函数解析延拓可得(略去时间因子 $e^{-j\omega t}$)

$$\widetilde{E}_i(y,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4}H_0^{(1)}(k_1\widetilde{D}_i) \tag{2}$$

式中

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_i&=\sqrt{(y-\widetilde{y}_s)^2+(z-\widetilde{z}_s)^2}\\&=\sqrt{(y-jb\sin\alpha)^2+(z+z_b-jb\cos\alpha)^2},\\&\quad \mathrm{Re}\widetilde{D}_i\geqslant 0\end{aligned} \tag{3}$$

利用场的平面波谱积分表达式[3]，对韩克尔函数 $H_0^{(1)}$ 进行傅里叶变换，可得到界面附近的直射波场量积分表达式

$$\widetilde{E}_i(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}A_i(k_y)e^{j(k_yy+\sqrt{k_1^2-k_y^2}z)}dk_y \tag{4}$$

式中 $A_i(k_y)$ 为二维复源点直射场的平面波谱函数

$$A_i(k_y)=-\frac{\omega\mu_0}{4}\frac{e^{k_yb\sin\alpha+j\sqrt{k_1^2-k_y^2}(z_b-jb\cos\alpha)}}{\sqrt{k_1^2-k_y^2}} \tag{5}$$

类似地，对于界面附近的反射波(向 $-z$ 方向离开界面)和折射波(向 $+z$ 方向)我们分别有

$$\widetilde{E}_r(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}A_r(k_y)e^{j(k_yy-\sqrt{k_1^2-k_y^2}z)}dk_y \tag{6}$$

$$\widetilde{E}_t(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}A_t(k_y)e^{j(k_yy+\sqrt{k_2^2-k_y^2}z)}dk_y \tag{7}$$

式中 $A_r(k_y)$ 和 $A_t(k_y)$ 分别为反射波和折射波的平面波谱函数。根据指数函数 e^{jk_yy} 在整个空间的正交性和完备性，利用 $z=0$ 平面上的边界条件可直接求得

$$A_t(k_y)=\frac{2\sqrt{k_1^2-k_y^2}}{\sqrt{k_1^2-k_y^2}+\sqrt{k_2^2-k_y^2}}A_i(k_y) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}A_r(k_y)&=A_t(k_y)-A_i(k_y)\\&=\frac{\sqrt{k_1^2-k_y^2}-\sqrt{k_2^2-k_y^2}}{\sqrt{k_1^2-k_y^2}+\sqrt{k_2^2-k_y^2}}A_i(k_y)\end{aligned} \tag{9}$$

将(9)式代入(6)式可导出我们感兴趣的复源点反射场积分表达式

$$\widetilde{E}_r(y,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4}H_0^{(1)}(k_1\widetilde{D}_r)+\frac{\omega\mu_0}{2}I_r(y,z), \tag{10}$$

式中

$$\widetilde{D}_r=\sqrt{(y-jb\sin\alpha)^2+(|z|+z_b-jb\cos\alpha)^2},\quad \mathrm{Re}\widetilde{D}_r\geqslant 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}I_r(y,z)=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{k_2^2-k_y^2}}{\sqrt{k_1^2-k_y^2}\left(\sqrt{k_1^2-k_y^2}+\sqrt{k_2^2+k_y^2}\right)}\\&\times e^{j[k_y(y-jb\sin\alpha)+\sqrt{k_1^2-k_y^2}(|z|+z_b-jb\cos\alpha)]}dk_y\end{aligned} \tag{12}$$

由积分 I_r 的被积函数可知，积分路径上有分支点 $k_{y1,2}=\pm k_1$，$k_{y3,4}=\pm k_2$，故积分路径应绕过这些分支点。图2表示 k_y 平面上的积分路径、分支点和分支线 $I_m\sqrt{k_{1,2}^2-k_y^2}=0$。

为了计算反射场 $\widetilde{E}_r$，在高频条件下可用最陡下降法对积分 I_r 进行渐近估值。为此，引入新的变量 w，并令

$$\sin w=\frac{k_y}{k_1} \tag{13}$$

于是积分 I_r 变为

$$\begin{aligned}I_r(y,z)=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2w}}{\cos w+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2w}}\\&\times e^{jk_1\widetilde{D}_r\cos(w-\widetilde{\theta})}dw\end{aligned} \tag{14}$$

式中 $\widetilde{D}_r$ 由(11)式给出，显然它表示了从复源点 $\widetilde{S}$ 到镜像观察点 $P'(y,-z)$ 的距离，或等效地可视为从镜像复源点 $\widetilde{S}'$ 到观察点 $P(y,z)$ 的距离(见图1)；$\widetilde{\theta}$ 表示该复射线与界面法线(z 轴)的夹角，即是复射线的复入射角

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}&=\sin^{-1}\left(\frac{y-jb\sin\alpha}{\widetilde{D}_r}\right)\\&=\sin^{-1}\left(\frac{y-jb\sin\alpha}{\sqrt{(y-jb\sin\alpha)^2+(|z|+z_b-jb\cos\alpha)^2}}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

(14)式的积分路径如图2中的 P_0 所示。其分支点为

$$w_{b1,2}=\pm\sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}=\pm\theta_c \tag{16}$$

式中 θ_c 为全反射临界角。

利用积分渐近计算理论[2]，可将 w 平面上的原始积分路径 P_0 修改为过鞍点的最陡下降路径 P_{SD}(图2)，鞍点位置可由(14)式求得

$$w_s=\widetilde{\theta} \tag{17}$$

上式表明，鞍点就是复入射角，由(15)式可知，对于给定的复源点 $\widetilde{S}$，复鞍点 $\widetilde{\theta}$ 随观察点 $P(y,z)$ 而变，或等效地随实空间观察角 θ 而变，这里 θ 是由(15)式令 $b=0$ 而得的实入射角。图3所示为对应于不同观察角 θ(因而有不同的复鞍点 w_s)时的最陡下降路径。

图3中最右边和最左边的两条路径 $\theta_{4,5}=\pm\pi/2$ 对应于 $y=\pm\infty$ 的极限情况；$\theta_3=\alpha$ 的路径表示观察点位于波束轴线上，由复射线近轴近似理论[4]可知，轴向观察点具有实射线属性，故此时有 $\widetilde{\theta}=\theta=\alpha$；图中 $\theta_{1,2}=\pm\theta_t$ 的两条路径分别通过分支点 $w_{b1,2}=\pm\theta_c$，θ_t 称为过渡角，由 $\widetilde{D}_r$ 和 $[\widetilde{D}_r\cos(\widetilde{\theta}-\theta_c)]$ 实部相等的条件所决定[5]，即由下式给出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(D_r^2-b^2)^2+4D_r^2b^2\cos^2(\theta_{1,2}-\alpha)}+(D_r^2-b^2)}\\&=D_r\cos(\theta_{1,2}-w_{b1,2})\end{aligned} \tag{18}$$

式中 D_r 是实源点 $S(0,-z_b)$ 到观察点 $P(y,z)$ 的反

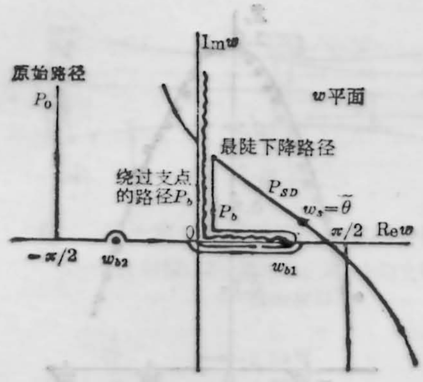

图 2　w 平面上的积分路径

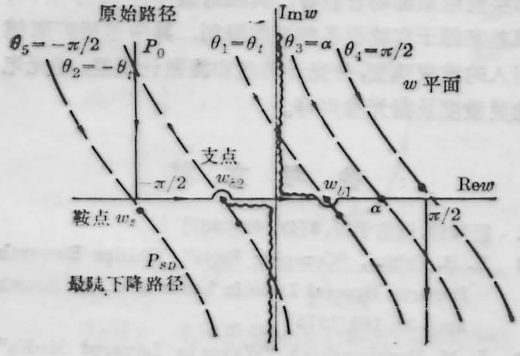

图 3　对应于不同观察角 θ 的最陡下降路径

射路径长度，由(11)式令 $b=0$ 而得。由上式可知，过渡角 θ_t 位于临界角 θ_c 和波束指向角 α 之间；对于实线源，将 $b=0$ 代入上式可得 $\theta_t=w_b=\theta_c$。

按照积分渐近理论[6]，只要鞍点 w_s 不与支点 w_b 十分接近，则(14)的积分 I_r 可用孤立鞍点的最陡下降法进行计算。当最陡下降路径与分支线相交两次或不相交时(图 3 中 $\theta_2<\theta<\theta_1$)，I_r 只包含鞍点贡献 I_{rs}；当最陡下降路径与分支线只相交一次时(图 3 中 $\theta>\theta_1$ 或 $\theta<\theta_2$)，I_r 还应计入支点的贡献 I_{rb}，它由图 2 所示的围绕分支线的积分路径 P_b 给出。于是 I_r 可写为

$$I_r(y,\ z)=I_{rs}(y,\ z)+[u(\theta-\theta_1)+u(\theta_2-\theta)]I_{rb}(y,\ z) \tag{19}$$

式中 $u(x)$ 为单位阶跃函数：

$$x<0,\ u=0;\ x>0,\ u=1。$$

分别计算出鞍点和支点贡献，代入(10)式并忽略高阶项，可得过渡区外波束反射场的渐近计算公式

$$\widetilde{E}_r(y,\ z)=\widetilde{E}_{rs}(y,\ z)+[u(\theta-\theta_1)+u(\theta_2-\theta)]\widetilde{E}_{rb}(y,\ z) \tag{20}$$

式中鞍点对反射场的贡献

$$\widetilde{E}_{rs}(y,\ z)\sim-\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{j8\pi k_1 D_r}}R(\tilde{\theta})e^{jk\widetilde{D}_r} \tag{21}$$

$$R(\tilde{\theta})=\frac{\cos\tilde{\theta}-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2\tilde{\theta}}}{\cos\tilde{\theta}+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2\tilde{\theta}}} \tag{22}$$

显然它代表了几何光学反射场，$R(\tilde{\theta})$ 则是菲涅耳反射系数；而支点对反射场的贡献

$$\widetilde{E}_{rb}(y,\ z)\sim-\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\operatorname{tg}\theta_c}\frac{e^{jk_1D_r\cos(\tilde{\theta}-\theta_c)}}{[jk_1\widetilde{D}_r\sin(\tilde{\theta}-\theta_c)]^{3/2}} \tag{23}$$

可见与鞍点贡献相比，支点贡献是高阶项。利用图 4 所示的几何关系，(23)式可改写为

$$\widetilde{E}_{rb}(y,\ z)\sim-\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{tg}^2\theta_c\frac{e^{j[k_1(\widetilde{L}_1+\widetilde{L}_3)+k_2\widetilde{L}_2]}}{(jk_2\widetilde{L}_2)^{3/2}} \tag{24}$$

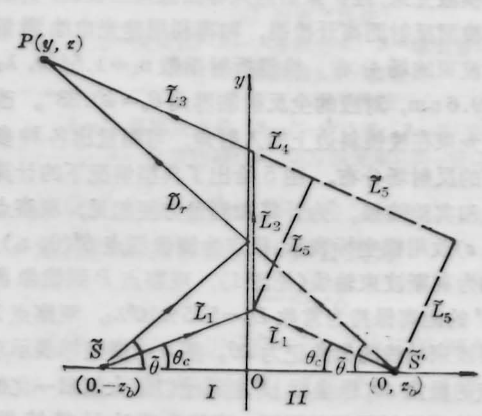

图 4　复源点场的横向波路径

上式表明，支点贡献可解释为 μ 从复源点 $\widetilde{S}$ 出发沿临界角 θ_c 入射到界面的一条复射线 $\widetilde{L}_1$，在媒质 II 中沿表面传播一段距离 $\widetilde{L}_2$ 后，再以 θ_c 射出经路径 $\widetilde{L}_3$ 而到达观察点 P。由此可见，支点贡献就是复射线的横向波贡献，在物理本质上它与实射线全反射时的横向波是相同的。

当波束指向角 α 和观察角 θ 同时接近临界角 θ_c 时，有 $\tilde{\theta}=\theta=\alpha\to\theta_c$，于是反射场出现奇异性，上述公式失效，这个区域称为临界角过渡区。从数学观点来看，这是由于鞍点 $w_s=\tilde{\theta}$ 与支点 $w_b=\theta_c$ 十分靠近，因而孤立鞍点法不能应用。这时需对(12)式的积分 I_r 进行更精细地估值。利用相邻三鞍点的变形最陡下降法[6]，我们得到过渡区内波束反射场的渐近公式

$$\widetilde{E}_{rt}(y,\ z)\sim-\frac{\omega\mu_0}{4}H_0^{(1)}(k_1\widetilde{D}_r)-\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{j8\pi}}\frac{e^{jk_1\widetilde{D}_r(\Omega-\beta^2/8\gamma)}}{\sin\theta_c\cos^2\theta_c(-j2k_1\widetilde{D}_r r)^{3/4}}\times D_{1/2}j\left(j\sqrt{j2k_1\widetilde{D}_r}\frac{\beta}{2r}\right) \tag{25}$$

式中
$$\Omega=\cos(\tilde{\theta}-\theta_c) \tag{26}$$
$$\beta=\frac{\sin(\theta_c-\tilde{\theta})}{\sin 2\theta_c} \tag{27}$$
$$r=-\frac{1}{8}\left(\frac{\cos\tilde{\theta}}{\cos^3\theta_c}+\frac{\sin\tilde{\theta}}{\sin^3\theta_c}\right) \tag{28}$$
$D_{1/2}(z)$为复宗量 z 的 1/2 阶抛物柱函数。

三、数值计算与实验结果

利用公式(20)、(21)、(23)和(25)，我们计算了各种参数下的波束反射场，并用单模激光束的反射场测量进行了实验佐证。实验是在暗室内进行的，由 He-Ne 激光器产生波长(在自由空间)为

$$\lambda_2=632.8\,\mathrm{nm}$$

的单模激光束，经扩束后进入等腰直角三棱镜，并从斜边棱面反射而离开棱镜，和再利用硅光电池测量反射波束的场分布。棱镜折射指数 $n_1=1.5449$, $\lambda_1=409.6\,\mathrm{nm}$, 对应的全反射临界角 $\theta_c=40.33°$。改变激光束在棱镜斜边上的入射角，可测量出各种参数下的反射场分布。图 5 给出了典型情况下的计算曲线和实验结果。为计算和测量方便起见，观察点 $P(y, z)$改用极坐标表示，极点为镜像源点 $S'(0, z_b)$，极轴为高斯波束轴线(见图 1)，观察点 P 到镜像源点 S' 的距离保持为常数 $D_r=5.5\times10^5\lambda_1$，观察点 P 偏离波束轴线的极角记为 $\Delta\theta$。图 5 中横坐标表示观察点的极角 $\Delta\theta$，纵坐标 $|\tilde{E}_r|$ 表示以最大值归一化的高斯波束反射场相对振幅。实线为理论计算结果，点线为实验测量数据。由(11)式和(15)式可知。复反射路径长度 $\tilde{D}_r$ 和复入射角 $\tilde{\theta}$ 都是观察点座标 (y, z)的函数，也即是其极坐标$(D_r, \Delta\theta)$的函数，因此在场量计算式(20)、(21)、(23)和(24)中的 $\tilde{D}_r$ 和 $\tilde{\theta}$ 都只是 $\Delta\theta$ 的函数(D_r=常数)。图中的计算结果

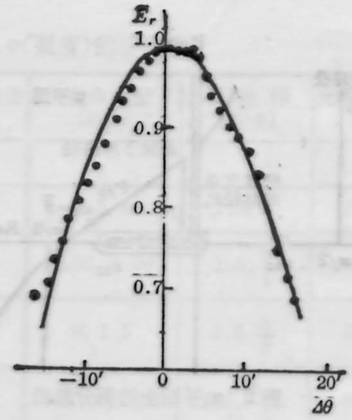

图 5　反射场分布($\alpha=40.53°$, $b/\lambda_1=5318$)

和实验结果都吻合较好，其相对误差在 10% 以内，误差来源于实验设备精度的限制，其中包括扩束镜引入的波束畸变，分光计转盘和测微计误差，硅光电池灵敏度及漏光噪声等。

参 考 文 献

1　阮颖铮，通信学报，**8**(4)，49(1987)

2　L. B. Felsen, "Complex Rays", Philips Research Reports, Special Issue in honor of C. J. Bouwkamp 30, 169(1975)

3　L. M. Brekhovskikh, "Waves in Layered Media" Second /Edition, Academic Press, N. Y., 1980,

4　Y. Z. Ruan and L. B. Felsen, *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**(4), 566(1986)

5　J. W. Ra *et al.*, *SIAM J. Appl. Math.*, **24**(3), 396(1973)

6　L. B. Felsen and N. Marcuvitz, "Radiation and Scattering of Wav s", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973

(收稿日期：1987 年 10 月 19 日)