

迭加态与非经典光场

夏云杰 郭光灿

(中国科学技术大学物理系, 合肥)

Superposition state and non-classical light field

Xia Yunjie, Guo Guangcan

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

提要: 本文给出了存在压缩和反聚束效应的一类新的光场态——真空态与相干态的迭加, 这种态的最佳压缩点在相干态的平均光子数 $\bar{n}=2.56$ 处, 最大相对压缩量达 56%, 反聚束效应可任意地接近单个光子的 Fock 态。

关键词: 迭加, 压缩, 反聚束

一、引言

非经典光场是近年来量子光学研究的主要课题之一, 压缩态与反聚束效应尤为人们所注目。过去对压缩光场的研究一般都局限于双光子过程^[1, 2](例如四波混频和参量放大), 最近, K. Wodkiewicz 等人^[3]发现, 光场真空态与单个光子或两个光子 Fock 态迭加

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle \quad (1)$$

$$|\psi_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|2\rangle \quad (2)$$

也存在压缩性, 而 Fock 态其它类型的迭加态却不存在压缩性。(1)、(2) 表示的态存在压缩性, 表明产生压缩态的体系不仅仅是双光子过程, 从而为人们寻找压缩光场指出了一条新的途径。本文研究了真空态与相干态的迭加态, 结果发现这类光场也有压缩存在, 压缩程度与相干态的平均光子数 \bar{n} 密切相关, 最

佳压缩点在 $\bar{n}=2.56$ 处, 最大相对压缩量高达 56%, 而且这种迭加态的反聚束效应也很强可以任意地接近单个光子 Fock 态(此态是最大反聚束态)。另外, 这种态还存在很强的聚束效应, 它的二阶相干度可以是任意大的正数。

二、迭加态的压缩效应

根据量子力学的迭加原理, 单模光场存在下面的迭加态

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|z\rangle \quad (3)$$

其中 α, β 是复常数, $|0\rangle, |z\rangle$ 分别是光场真空态与相干态, 它们满足下列关系

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (4)$$

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z'|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2) + z'^*z} \quad (5)$$

收稿日期: 1987年12月15日。

$|\psi\rangle$ 的归一化要求

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) e^{-\frac{1}{2}R^2} = 1, \quad (6)$$

其中 $z = Re^{i\phi}$, $\beta = r_1 e^{i\theta_1}$, $\alpha = r_2 e^{i\theta_2}$ 。

定义厄米标符

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad (7)$$

若某一状态存在压缩, 则应满足

$$\langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle = \langle \hat{a}_1^2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle^2 < \frac{1}{4} \quad (8)$$

由(3)、(4)、(5)等式, 可得到下列有关量的态平均值:

$$\begin{aligned} \langle (\hat{a}^+ + \hat{a}) \rangle &= 2r_1^2 R \cos \phi \\ &+ 2r_1 r_2 R e^{-\frac{1}{2}R^2} \cos(\phi + \theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 \rangle &= 2r_1^2 R^2 \cos 2\phi \\ &+ 2r_1 r_2 R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \cos(2\phi + \theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = r_1^2 R^2 \quad (11)$$

以上三式给出

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle &= \frac{1}{4} [\langle \hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^+ \hat{a} + 1 \rangle \\ &- \langle \hat{a}^+ + \hat{a} \rangle^2] \\ &= r_1^2 R^2 \cos^2 \phi + \frac{1}{2} r_1 r_2 R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \\ &\times \cos(2\phi + \theta_1 - \theta_2) - r_1^4 R^2 \cos^2 \phi \\ &- r_1^2 r_2^2 R^2 e^{-R^2} \cos^2(\phi + \theta_1 - \theta_2) \\ &- 2r_1^3 r_2 R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \cos \phi \\ &\times \cos(\phi + \theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (12)$$

从(12)式明显地看出, 适当地选择 r_1 、 r_2 、 R 和 ϕ 、 θ_1 、 θ_2 等常数, $|\psi\rangle$ 具有压缩效应。我们定义相对压缩量 u 为

$$u = \frac{\frac{1}{4} - \langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle}{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

它表示相对于相干态的压缩程度。其取值范围为

$$-\infty < u \leq 1 \quad (14)$$

u 越大, 压缩越大。 $u \leq 0$ 时, 则不存在压缩。

下面讨论几种特殊情况下态 $|\psi\rangle$ 的压缩。

$$1. \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad 2\phi + \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

对此情况, (12)式给出

$$\langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} - r_1^2 r_2^2 R^2 e^{-R^2} \quad (16)$$

它表示对任意的 r_1 、 r_2 和 R 都有压缩存在, 将(16)式代入(13)式得

$$u = 4r_1^2 r_2^2 R^2 e^{-R^2} \quad (17)$$

(15)式的条件使归一化要求变为

$$r_1^2 + r_2^2 = 1 \quad (18)$$

上式代入(17)式得

$$u = 4r_1^2 (1 - r_1^2) R^2 e^{-R^2} \quad (19)$$

式中 r_1^2 、 R^2 是相互独立的, 在(19)式中又是分离的, 容易求出当 $r_1^2 = \frac{1}{2}$, $R^2 = 1$ 时 u 取最大值:

$$u_{\max} = e^{-1} = 37\% \quad (20)$$

$$2. \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad 2\phi + \theta_1 - \theta_2 = \pi \quad (21)$$

把(21)式代入(12)、(6)两式, 得

$$\langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} r_1 r_2 R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \quad (22)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 e^{-\frac{1}{2}R^2} = 1 \quad (23)$$

(23)是条件(21)下态 $|\psi\rangle$ 的归一化要求。由(22)得

$$u = 2r_1 r_2 R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \quad (24)$$

最大相对压缩量是求函数 u 在约束条件(23)下的极值, 利用拉哥朗日乘子法, 我们可以求出最佳压缩在

$$r_1^2 = r_2^2 = 0.39 \quad (25)$$

$$R^2 = 2.56 \quad (26)$$

条件下, 最大相对压缩量为

$$u_{\max} = 56\% \quad (27)$$

从(23)式也可解出 r_1 (只能取正根)

$$r_1 = -r_2 e^{-\frac{1}{2}R^2} + \sqrt{r_2^2 (e^{-R^2} - 1) + 1} \quad (28)$$

代入(24)得

$$u = 2R^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \left[r_2 \sqrt{r_2^2 (e^{-R^2} - 1) + 1} - r_2^2 e^{-\frac{1}{2}R^2} \right] \quad (29)$$

图1是 R^2 固定, u 随 r_2 的变化规律, 它显示出最大压缩与相干态的平均光子数 $\bar{n} = R^2$ 密切相关, 只有 R^2 取某一特定值, 才能取得最佳压缩; 对某一固定的 R^2 , 相对压缩量对 r_2 的依赖也很明显, 但都存在某一值, 使 u 取极大。

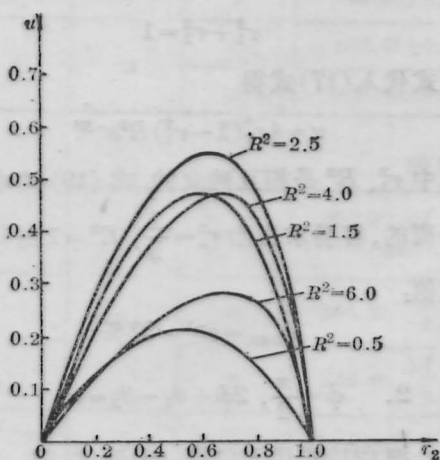


图1 相对压缩量 u 随 r_2 的变化

三、迭加态的反聚束效应

光的反聚束效应也是光场量子性的重要表现, 在单模情况下, 它与光的亚泊松 (Subpoisson) 分布是等价的^[4]。由(3)式易得

$$\langle \hat{a}^{+2} \hat{a}^2 \rangle = r_1^2 R^4 \quad (30)$$

上式与(11)式给出迭加态 $|\psi\rangle$ 的二阶相干度为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^{+2} \hat{a}^2 \rangle}{\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle^2} = \frac{1}{r_1^2} \quad (31)$$

它表明, 若 $r_1^2 > 1$, 则态 $|\psi\rangle$ 是反聚束的, 若 $r_1^2 < 1$, 态 $|\psi\rangle$ 是聚束的。

我们先看前面两种具有压缩的情况。对(15)式表示的场合, 实际上有 $\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, 这时归一化条件为(18)式, 它要求 r_1^2 和 r_2^2 都要小于1, 故此时虽然存在压缩, 但永远没有

反聚束效应。由于 r_1^2 可取任意小的正数, 二阶相干度便能达到任意大的正数, 即这时态 $|\psi\rangle$ 的聚束效应可以很强, 远远超过混沌光场。对于(21)式的情形, 有 $\theta_1 - \theta_2 = 0$, 归一化条件为(23)式, 虽然这时也有 $r_1^2 < 1$, 即没有反聚束效应, 但由于 r_1^2 的取值与 R^2 有关, 预计可能有某些新的特点。从(28)式的 r_1 看出, 若对某一固定的 R^2 , r_1 有可能对某些 r_2 的值变得非常小, 于是二阶相干度也可比混沌光大得多。图2是 R^2 固定, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 的变化规律, 当 $r_2 > 0.6$ 时, $g^{(2)}(0)$ 变得非常大, R^2 越小 $g^{(2)}(0)$ 增长得更快。

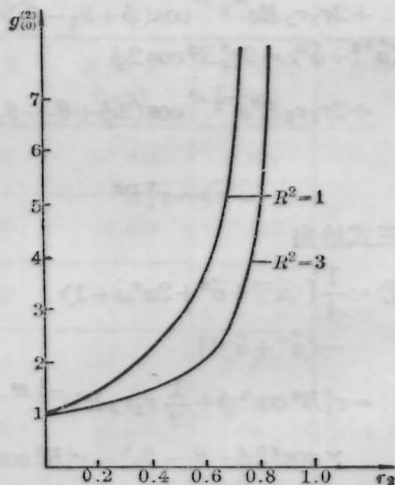


图2 $\theta_1 - \theta_2 = 0$ 时, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 的变化

下面我们讨论第三种情况:

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi \quad (32)$$

代入归一化条件(6)得

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 e^{-\frac{1}{2}R^2} = 1 \quad (33)$$

上式表明, r_1^2 、 r_2^2 均可能大于1, 故一定会存在反聚束效应。由(33)可以解出

$$r_1^{(1)} = r_2 e^{-\frac{1}{2}R^2} + \sqrt{r_2^2 (e^{-R^2} - 1) + 1} \quad (34)$$

$$r_1^{(2)} = r_2 e^{-\frac{1}{2}R^2} - \sqrt{r_2^2 (e^{-R^2} - 1) + 1} \quad (35)$$

我们讨论 R^2 固定的情况。虽然 r_2^2 可大于1, 但根号下的量必须非负, 故 r_2^2 的最大取值有

限制

$$r_2^2 \leq \frac{1}{1 - e^{-R^2}} \quad (36)$$

由于 r_1 也不能为负, 若取根 $r_1^{(2)}$, 则 r_2^2 的最

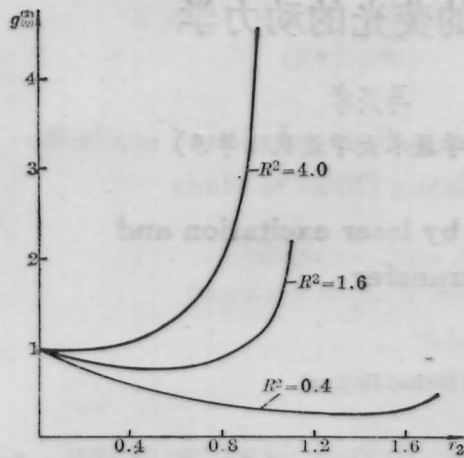


图3 r_1 取 $r_1^{(1)}$ 和 R^2 固定时, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 的变化

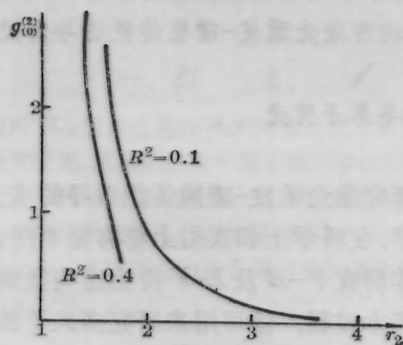


图4 r_1 取 $r_1^{(2)}$ 和 R^2 固定时, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 的变化

小取值也有一限制

$$r_2^2 \geq 1 \quad (37)$$

即对(35)式, 要求 r_2^2 满足

$$1 \leq r_2^2 \leq \frac{1}{1 - e^{-R^2}} \quad (38)$$

图3是 r_1 取(34)式的 $r_1^{(1)}$, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 变化的情况, 它表明 R^2 越小, 反聚束越强, 当 R^2 较小时 (比如 $R^2=0.4$), 光场总是反聚束的, R^2 很大时几乎不存在反聚束效应, 而是存在很强的聚束效应。图4表示 r_1 取 $r_1^{(2)}$ 时, $g^{(2)}(0)$ 随 r_2 的变化。显然, R^2 较小时, $g^{(2)}(0)$ 可在很大范围内取值, 其中有时趋于零, 即非常接近单个光子 Fock 态 $|1\rangle$, 这是非常强的反聚束效应。当 R^2 较大时, 由(38)式, r_2^2 的取值范围非常小, R^2 很大时, 实际上 r_2^2 只取1, 此时 r_1 趋于零, 故 R^2 很大时, 不管 r_1 取(34)式还是(35)式, 二阶相干度都非常大, 有时甚至趋于无穷大, 总之, 在这种情形下, 要得到很强的反聚束态, 应该使迭加态 $|\psi\rangle$ 中的相干态平均光子数 R^2 取得较小, 若要得到比混沌光更强的聚束态, 就必须使 R^2 取得特别大。

参 考 文 献

- 1 R. S. Bondurant *et al.*, *Phys. Rev. A*, **30**, 343 (1984)
- 2 C. W. Gardiner *et al.*, *Opt Commun.*, **50**, 173 (1984)
- 3 K. Wodkiewicz *et al.*, *Phys. Rev. A*, **35**, 2567 (1987)
- 4 郭光灿 *et al.*, 物理学报, **36**, 698(1987)