

## 自由运转环形激光器的横向效应

樊 锡 君

(北京大学无线电电子学系)

## Transverse effect in a free running ring laser

Fan Xijun

(Department of Radio-Electronics, Peking University, Beijing)

**提要:** 我们考虑一个带球面镜的均匀展宽的环形激光器,从理论上求得了“优质腔”的失稳条件。分析中使用了平均场近似,并假定费涅耳数远大于1,原子和腔完全调谐。

**关键词:** 自由运转,优质腔,高斯模

## 一、引言

Haken<sup>[1]</sup>和 Risken 等<sup>[2]</sup>的分析表明,在“劣质腔”条件下,一个均匀展宽的单模激光器的定态可能变成不稳定的。后来, Haken<sup>[3]</sup>又证明了这个失稳性与可导致混沌行为的 Lorenz 失稳性<sup>[4]</sup>是一致的。另一方面, Risken 和 Nummedal<sup>[5]</sup>以及 Graham 和 Haken<sup>[6]</sup>讨论了考虑到所有纵向腔模的均匀展宽的激光器。他们指出,在“优质腔”情况,在适当的条件下,不与原子体系共振的某些腔模可能变成不稳定的。

在以上所列举的文献中,电场都被看作是平面波。然而,在实际的激光器中,最有代表性的电场是具有横向结构的高斯型。Lugiato 和 Milani<sup>[7]</sup>分析了电场为腔的高斯束 TEM<sub>00</sub> 模的均匀展宽的自由运转单模激光器的稳定性。结果表明,在“优质腔”和“劣

质腔”两种情况下都不会发生失稳现象。

本文将讨论电场为高斯束 TEM<sub>10</sub> 模的均匀展宽的自由运转单模激光器的稳定性问题。对“优质腔”来说,在适当的条件下可以出现失稳现象。

## 二、单横模 Maxwell-Bloch 方程组

考虑一个长度为  $\mathcal{L}$  的单向环形腔(图1)。在腔中有一个长度为  $L$ 、截面为  $\pi d^2$ 、体积为  $V = \pi d^2 L$  的圆柱形原子样品。样品中有大量 ( $N$  个)偶极矩为  $\mu$  的二能级原子。原子体系是均匀展宽的,跃迁频率为  $\omega_a$ ,纵向和横向的衰变率分别为  $\gamma_l$  和  $\gamma_\perp$ 。自由运转的激光器的工作频率为  $\omega_L$ 。

用  $E$ 、 $P$  和  $D$  分别表示归一化的慢变电场包络、归一化的极化包络和上下能级布居差。这样,在 Maxwell 方程中略去含有  $\partial^2 E/$

收稿日期:1987年12月10日。

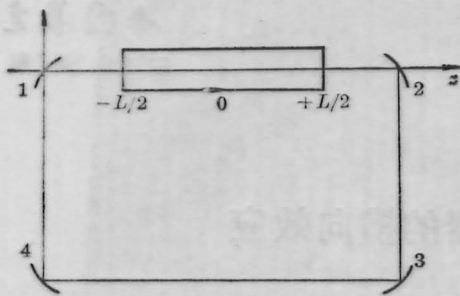


图1 具有球面镜的单向环形腔  
(镜3和镜4反射率为100%, 镜1和镜2的透射系数为T, 箭头表示激光器的输出)

$\partial^2 z$ 、 $\partial^2 E/\partial t^2$ 、 $\partial^2 P/\partial t^2$  和  $\partial P/\partial t$  的项, 使用偶极近似和旋波近似, 则  $E$ 、 $P$  和  $D$  服从下面的 Maxwell-Bloch 方程组:

$$\frac{1}{2\hat{q}K_L} \nabla_{\perp}^2 E + \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \alpha\sigma P \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma_{\perp} \{DE - P(1+i\Delta)\} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2}(PE^* + EP^*) + D - X_v(r, z) \right\} \quad (1.3)$$

其中,  $\nabla_{\perp}^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$  是横向拉普拉斯算符; 参量  $\alpha$  表示电场振幅的每单位长度的不饱和吸收系数;  $\sigma$  为由泵浦产生的每个原子的不饱和布居反转;  $K_L$  为波矢量, 且

$$K_L = \omega_L/c_0 \quad (2)$$

$\Delta$  是原子调谐参量, 且

$$\Delta = (\omega_a - \omega_L)/\gamma_{\perp} \quad (3)$$

$X_v$  是原子样品的特征函数(图1), 且

$$X_v = \begin{cases} 1 & (|z| < L/2, r < d) \\ 0 & (|z| > L/2, \text{ 或 } r > d) \end{cases} \quad (4)$$

若电场为腔的高斯光束 TEM<sub>10</sub> 模, 则<sup>[8]</sup>

$$E(r, z, t) = f(z, t) K(r, z) \exp[i\hat{q}\phi(r, z)] \quad (5.1)$$

其中,  $f(z, t)$  为场振幅,

$$K(r, z) = \frac{1}{[1 + (z/z_0)^2]^{1/2}} \times \left[ 1 - \frac{2r^2}{W^2(z)} \right] \exp\left[ -\frac{r^2}{W^2(z)} \right], \quad (5.2)$$

$$\phi(r, z) = K_L \frac{r^2}{R(z)} + 3 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (5.3)$$

$$W(z) = W_0 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4)$$

$$R(z) = \frac{1}{z} (z^2 + z_0^2), \quad (5.5)$$

$$z_0 = \pi W_0^2/\lambda_0. \quad (5.6)$$

这里  $W_0$  是高斯光束束腰,  $z_0$  是瑞利(Rayleigh)长度,  $\lambda_0$  是波长。

如果我们定义以下的量

$$\tilde{f}(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W_0} f(z, t) \quad (6.1)$$

$$\tilde{P}(r, z, t) = \exp[-i\phi(r, z)] P(r, z, t) \quad (6.2)$$

则可由前面给出的 Maxwell-Bloch 方程组导出单横模方程组:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \alpha\sigma \int_0^{\infty} dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z) \tilde{P}(r, z, t) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \gamma_{\perp} \{D\tilde{f}K(r, z) - \tilde{P}(1+i\Delta)\} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} K(r, z) [\tilde{f}^* \tilde{P} + \tilde{f} \tilde{P}^*] + D - X_v(r, z) \right\} \quad (7.3)$$

若假定腔内场为 TEM<sub>10</sub> 模, 有放大介质, TEM<sub>10</sub> 模的增益超过了所有其它横模的增益, 这个单横模模型的假设就是相当合理的。需要提请注意, (7) 式包括所有的腔的纵横模在内, 单模假设只涉及横模。关于 (7.1) 式的边界条件是

$$\tilde{f}\left(-\frac{L}{2}, t\right) = (1-T)e^{-i\delta}\tilde{f}\left(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L}-L}{c}\right) \quad (8)$$

其中,  $\delta$  为腔失谐参量。

### 三、线性稳定性分析

在定态情况 ( $\partial\tilde{f}/\partial t=0, \partial\tilde{P}/\partial t=0, \partial D/\partial t=0$ ), 有

$$\tilde{P}_{st}(r, z) = \frac{(1-i\Delta)\tilde{f}K(r, z)}{1+\Delta^2+K^2(r, z)|\tilde{f}|^2} \cdot X_v(r, z) \quad (9.1)$$

$$D_{st}(r, z) = \frac{1+\Delta^2}{1+\Delta^2+K^2(r, z)|\tilde{f}|^2} \cdot X_v(r, z) \quad (9.2)$$

以下讨论完全调谐 (即  $\Delta=\delta=0$ ) 的情况 (否则将只能用数值计算法求解, 而无解析解)。此时  $\tilde{f}$  和  $\tilde{P}$  可以放心地假设为实函数。为了考查定态解的稳定性, 我们引进三个偏离量:

$$\delta f(z, t) = \tilde{f}(z, t) - \tilde{f}_{st}(z), \quad (10.1)$$

$$\delta P(r, z, t) = \tilde{P}(r, z, t) - \tilde{P}_{st}(r, z), \quad (10.2)$$

$$\delta D(r, z, t) = D(r, z, t) - D_{st}(r, z). \quad (10.3)$$

将以上三式代入 (7) 式并线性化可得,

$$\frac{\partial\delta f}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial\delta f}{\partial t} = -\alpha\sigma \int_0^\infty dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z)\delta P, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial\delta P}{\partial t} = \gamma_\perp \{K(r, z)[D_{st}\delta f + \tilde{f}_{st}\delta D] - \delta P\}, \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial\delta D}{\partial t} = -\gamma_\parallel \{K(r, z)[\tilde{P}_{st}\delta f + \tilde{f}_{st}\delta P] + \delta D\}. \quad (11.3)$$

其中偏离量  $\delta f$  服从边界条件

$$\delta f\left(-\frac{L}{2}, t\right) = (1-T)\delta f\left(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L}-L}{c}\right). \quad (12)$$

我们寻求如下形式的解

$$\delta f(z, t) = e^{\lambda t}\delta\tilde{f}(z) + \text{c. c.}, \quad (13.1)$$

$$\delta P(r, z, t) = e^{\lambda t}\delta\tilde{P}(r, z) + \text{c. c.}, \quad (13.2)$$

$$\delta D(r, z, t) = e^{\lambda t}\delta\tilde{D}(r, z) + \text{c. c.}. \quad (13.3)$$

使用 (9)~(13) 诸式, 可以得到决定  $\lambda$  值的方程为 (推导方法类似于 [9]):

$$\lambda = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln(1-T) - 2C'k\gamma_\perp \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi B(\lambda, \xi, \tilde{f}_{st}(\xi)) \quad (14.1)$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中

$$\alpha_n = 2n\pi c/\mathcal{L}, \quad k = cT/\mathcal{L}, \quad (14.2)$$

$$\xi = z/L, \quad C' = -\alpha\sigma L/2T$$

$$B(\lambda, \xi, \tilde{f}_{st}(\xi)) = \int_0^\infty dr \cdot X_v(r, \xi) \frac{4r}{W_0^2} \times \frac{K^2(r, \xi)}{1+K^2(r, \xi)\tilde{f}_{st}^2(\xi)} \times \frac{\gamma_\parallel [1-K^2(r, \xi)\tilde{f}_{st}^2(\xi)]}{(\gamma_\perp + \lambda)(\gamma_\parallel + \lambda) + \gamma_\perp\gamma_\parallel K^2(r, \xi)\tilde{f}_{st}^2(\xi)} \quad (14.3)$$

$$X_v(r, \xi) = \begin{cases} 1 & (|\xi| < 1/2, r < d) \\ 0 & (|\xi| > 1/2, \text{或 } r > d) \end{cases} \quad (14.4)$$

$$K(r, \xi) = \frac{1}{[1+(L/z_0)^2\xi^2]^{1/2}} \times \left[1 - \frac{2r^2}{W^2(\xi)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(\xi)}\right] \quad (14.5)$$

$$W(\xi) = W_0[1+(L/z_0)^2\xi^2]^{1/2} \quad (14.6)$$

由 (14.2) 式所定义的  $k$  为空腔阻尼常数,  $C'$  的绝对值表示不饱和增益参量 (这里  $\sigma > 0$ , 所以  $C' < 0$ , 而在光学双稳系统中则  $\sigma < 0$ , 从而  $C' > 0$ )。在 (14.1) 式中出现的指标  $n$  对应于腔的纵向频率, 而且本征值  $\lambda$  是以  $n$  来标记的 (在 (14.1) 和 (14.3) 中未明显标出)。

在平均场近似条件

$$\alpha L \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad (15.1)$$

$$C \equiv \alpha L / 2T = \text{常数} \quad (15.2)$$

成立的情况下, 可用  $-T$  代替  $\ln(1-T)$ , 且可认为定态场  $\tilde{f}_{st}(\xi)$  在区间  $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$  内是均匀的, 从而用  $\tilde{f}_{st}(\frac{1}{2}) = x$  来代替它。进而, 只注意“优质腔” ( $k \ll \gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$ ) 情况, 则 (14.1) 的解可以立即用叠代法求得

$$\begin{aligned} \lambda_n = & -i\alpha_n - k \left\{ 1 - 2\sigma C \gamma_{\perp} \right. \\ & \times \int_{-1/2}^{1/2} d\xi B(-i\alpha_n, \xi, x) \\ & \left. + O\left(\frac{k}{\gamma_{\perp}}, \frac{k}{\gamma_{\parallel}}\right) \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

$B(-i\alpha_n, \xi, x)$  是将由 (14.3) 所表示的  $B(\lambda, \xi, \tilde{f}_{st}(\xi))$  中  $\lambda$  和  $\tilde{f}_{st}(\xi)$  分别换成  $-i\alpha_n$  和  $x$  而得到的。

为了简化问题, 考虑费涅耳 (Fresnel) 数  $F (= \pi W_0^2 / \lambda L)$  远大于 1 (这在实验上是容易实现的), 且取  $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma, \beta = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp} = 1$  (一般  $\gamma_{\parallel}$  和  $\gamma_{\perp}$  同数量级, 故可如此假定), 于是从 (16) 式得到

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_n = & -i\bar{\alpha}_n - \bar{k} \left\{ 1 + \frac{2\sigma C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\theta \right. \\ & \left. \times \frac{\psi(\psi - 1 + i\bar{\alpha}_n)}{(1 + \psi)[(1 - i\bar{\alpha}_n)^2 + \psi]} \right\} \quad (17.1) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_n / \gamma, \quad \bar{\lambda}_n = \lambda_n / \gamma, \quad \bar{k} = k / \gamma, \quad (17.2)$$

$$\psi = x^2(1 - \theta)^2 \exp(-\theta), \quad \theta = 2(r/W_0)^2. \quad (17.3)$$

当至少  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  的取值中有一个使得  $\text{Re} \bar{\lambda}_n > 0$  时, 则定态是不稳定的。因此失稳条件是

$$H^{(n)}(x^2) > 1 \quad (18.1)$$

其中

$$\begin{aligned} H^{(n)}(x^2) = & -\frac{2\sigma C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\theta \\ & \times \frac{\psi}{1 + \psi} \cdot \text{Re} \left[ \frac{\psi - 1 + i\bar{\alpha}_n}{(1 - i\bar{\alpha}_n)^2 + \psi} \right] \\ = & -\frac{2\sigma C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\theta \cdot \frac{\psi}{1 + \psi} \\ & \times \frac{(\psi - 1)(1 - \bar{\alpha}_n^2 + \psi) - 2\bar{\alpha}_n^2}{(1 - \bar{\alpha}_n^2 + \psi)^2 + 4\bar{\alpha}_n^2} \quad (18.2) \end{aligned}$$

在方程 (18.1) 中, 左边表示第  $n$  个腔模的“增益”, 而右边表示已归一化的损耗; 当至少有一个腔模增益超过损耗时, 失稳要发生。

将 (18.2) 式中的被积函数作适当变化后按级数展开并考虑到  $d \gg W_0$ , 经过冗长的计算可得

$$H^{(n)}(x^2) = \frac{2\sigma C}{x^2} Q^{(n)}(x^2) \quad (19.1)$$

其中

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(x^2) = & \frac{1}{G} (2+a)x^2 \\ & + \frac{x^2}{G^2} [(2+a)(0.5ax^2 + 0.881x^4) \\ & - (2-a)^2(2a - 0.75x^2)] \\ & + \frac{x^4}{G^3} [(2+a)(-1.523ax^2x^2 \\ & + 0.849ax^4 + 0.693x^6) \\ & - (2-a)^2(5a^2 + 0.523ax^2 \\ & + 1.418x^4)] \quad (19.2) \end{aligned}$$

$$G = (1 - \bar{\alpha}_n + x^2)^2 + 4\bar{\alpha}_n^2 \quad (19.3)$$

$$a = 1 - \bar{\alpha}_n^2 \quad (19.4)$$

在这种情况下, 则  $\text{Re} \bar{\lambda}_n$  可表达为

$$\text{Re} \bar{\lambda}_n = -\bar{k} \left\{ 1 - \frac{2\sigma C}{x^2} Q^{(n)}(x^2) \right\} \quad (20)$$

数值计算表明, 跟 Lugiato 和 Milain<sup>[7]</sup> 分析的电场为腔的高斯束 TEM<sub>00</sub> 模的均匀展宽的自由运转单模激光器不同, 当电场具有腔的 TEM<sub>10</sub> 模的分布时, 对“优质腔”来说, 在适当的条件下, 失稳能够发生。

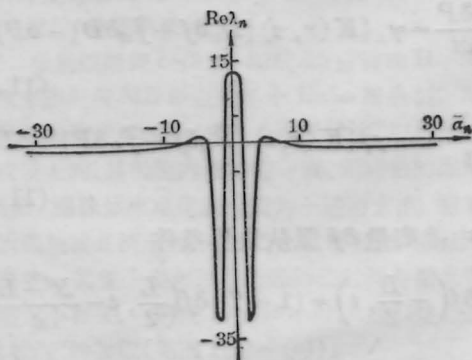


图 2  $\text{Re} \bar{\lambda}_n$  作为  $\bar{\alpha}_n$  的函数的曲线  
( $\Delta = \delta = 0, \beta = 1, F \gg 1, W_0 \ll d, C = 30, x = 2,$   
 $\text{Re} \bar{\lambda}_n > 0$  时, 失稳条件被满足)

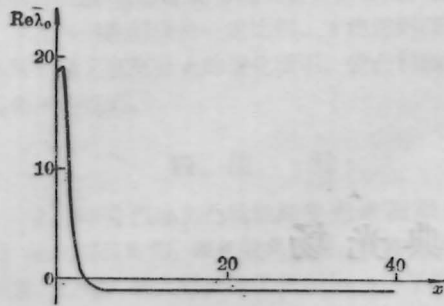


图3  $\text{Re } \bar{\lambda}_0$  作为  $x$  的函数的曲线  
( $\Delta = \delta = 0, \beta = 1, F \gg 1, W_0 \ll d, C = 10, n = 0$ )

将  $\bar{\alpha}_n$  看作连续变化的量, 则由(20)式所决定的  $\text{Re } \bar{\lambda}_n \sim \bar{\alpha}_n$  关系曲线如图2所示。显然, 倘若至少有一个腔频使得  $\bar{\alpha}_n$  能导致  $\text{Re } \bar{\lambda}_n > 0$ , 定态就成为不稳定的。若取  $C = 10, n = 0$  (从而  $\bar{\alpha}_n = 0$ ), 则由(20)给出的  $\text{Re } \bar{\lambda}_n \sim x$

关系曲线如图3所示。这时若输出  $x < 3.6$ , 则会使  $\text{Re } \bar{\lambda}_0 > 0$ , 从而定态就成为不稳定的。图2、3纵轴以  $\bar{b}$  为单位。

本文承陈继述教授的热情指导和审阅, 在此谨致谢意。

### 参 考 文 献

- 1 H. Haken, *Z. Physik*, **190**, 327(1960)
- 2 H. Risken *et al.*, *Z. Physik*, **194**, 337(1966)
- 3 H. Haken, *Phys. Lett.*, **53A**, 77(1975)
- 4 E. N. Lorenz, *J. Atoms. Sci.*, **20**, 130(1963)
- 5 H. Risken *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **39**, 4662(1968)
- 6 R. Graham *et al.*, *Z. Physik*, **213**, 420(1968)
- 7 L. A. Lugiato *et al.*, *Opt. Commun.*, **46**, 57(1983)
- 8 Yariv, A: *Introduction to optical electronics*, 2nd ed, New York, Holt Rinehart Winston (1976)
- 9 Bonifacio R. *et al.*, *A: Lett. Nuovo Cimento*, **21**, 510(1978)

(上接第409页)

限制电流模型中决定有源区温度的量是  $J_t$ ,

附表: 理论计算所采用的一些常数值

常数	数值	单位
$C_0$	2.35	Joule/K·cm <sup>3</sup>
$C_1$	1.73	Joule/K·cm <sup>3</sup>
$C_2$	1.53	Joule/K·cm <sup>3</sup>
$K_0$	0.73	Watt/(cm·K)
$K_1$	0.50	Watt/(cm·K)
$K_2$	0.13	(cm·K)
$\rho_2$	$4.26 \times 10^{-2}$	$\Omega \cdot \text{cm}$
$\rho_4$	$1.4 \times 10^{-2}$	$\Omega \cdot \text{cm}$
$\rho_3 = \rho_5 = \rho_6$	$2 \times 10^{-3}$	$\Omega \cdot \text{cm}$
$\rho_1$	$7 \times 10^{-3}$	$\Omega \cdot \text{cm}$
$\eta_{sp}$	0.55	
$\eta_{cat}$	0.3	
$\eta_t$	1	
$f$	0.65	

由此可以看出在同样的  $I_t$  条件下, 采用前者所计算的有源区内的温度要比用后一种模型计算的结果低。

作者对英国 Bath 大学电机系所提供的计算工作条件表示感谢。

### 参 考 文 献

- 1 M. C. Perkins *et al.*, *IEE Proc. Part I*, **133** (4), (1986)
- 2 E. Duda *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-15** (8), 812(1979)
- 3 W. B. Joyce *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **46**, 855 (1975)
- 4 W. Nakwaski, *Opt. Quant. Electr.*, (15), 313 (1983)
- 5 X. Zhang *et al.*, *J. Luminescence* **40 & 41**, 813 (1988)
- 6 H. C. Casey *et al.*, *Heterosturcture Lasers, Part B*, (Academic Press, 1978) 219