气压范围是很一致的[1]。

参考文献

1 Colin S. Willett, Introduction to Gas Laser: Population Inversion Mechanisms, (Oxford, New York, Toronoto, Sudney 1974), 13

2 L. B. Leob, Basic Processes of Gaseous Electronics (Univ. of California Press, 1955), Chaoter 4

3 M. J. Druyvesteyn *et al*. *Zeits f. Physik*, **64**, 790 (1930)

4 J. D. Swift, *Brit. J. Appl. Phys*., **16**, 837 (1965)

5 M. Z. Novgorodov *et al*., *IEEE J. Quant. Electr*., **QE-7**, 508 (1971)

6 W. L. Nighan, *Phys. Rev*., **A2**, 1898 (1970)

7 周光地,杨明江,胡昌信,电子学报, **11**(2), 93 (1983)

8 杨明江,王朝华, *Chinese Phys. Lett*., **5**(3), 109 (1988)

(收稿日期: 1987 年 12 月 28 日)

湍流大气中激光强度的起伏分布

张 逸 新*

(华东工学院光电技术系)

Statistical model for intensity fluctuation of laser light in a turbulent medium

Zhang Yixin

(Department of Optical and Electrical Technology, East China Institute of Technology, Nanjing)

提要: 本文在综合考虑湍流的光波散射和光束随机偏折的基础上，采用 Karhunen-Loéve 基展开所测随机光场复振幅的方法，讨论了光强起伏概率分布和时间平滑效应等问题。

关键词: 湍流大气，光强起伏

一、引 言

当相干光束在晴朗大气层中传播时，遭受着大气湍流随机波动的影响，这是对激光大气传输系统性能的最严格的限制。对描述激光大气传输光强起伏或闪烁统计分布规律的理论模式，已进行了广泛的理论和实验研究，其中对数正态模型是最普遍采用的闪烁概率模式[1]。但实验结果表明它只能应用于弱湍流起伏条件下的光传输。近年来，已唯象地建立多种能描述强湍起伏区域光强起伏概率分布规律的模式[1~5]，并且其中某些模式的理论值与实验值符合较好。

文献[6]中我们在考虑湍流大气的小尺度湍涡的光散射和大尺度湍涡的光束抖动的效应下，唯象地导出了与实验结果符合很好的闪烁概率 $K(\alpha)$ 分布模式，本文将对此问题作更深入的讨论。

二、光强闪烁概率分布模型

大量激光大气传输的实验和理论研究表明，实际湍流大气中存在着对传输光束产生不同效应的不同尺度的湍涡。所以，光学仪器所检测到的湍流导致的光束强度起伏是湍流散射和湍流导致的光束抖动的综合效应的反映。所以完整地描述光强闪烁概率分布必须同时考虑这两个因素。

在离散体湍流散射模型中，光束传输路径上某特定点处的光波场，可设想为通过不同通道传输的大量散射元的迭加，可用两个主要分量的相干迭加来表示:

$$u(t)=e^{i\omega t}[Ae^{i\theta(t)}+R(t)e^{i\phi(t)}] \qquad (1)$$

这里 ω 是光波频率，$Ae^{i\theta}$ 表示传输中未被散射的常振幅分量，也就是平均场分量。$Re^{i\phi}$ 由大量离散散射元组合的随机分量:

$$R(t)e^{i\phi(t)}=\sum_{j=1}^{N}r_j(t)e^{i\phi_j(t)} \qquad (2)$$

上式第一项代表了所有单次散射，第二项描述了所有二次散射等。假设各离散振幅 $\{r_j\}$ 和相位 $\{\phi_j\}$ 构成统计独立随机变量组，且各组随机量的特征值是

* 现在无锡轻工业学院工作。

统计独立的，同时$\langle R(t)e^{i\phi(t)}\rangle=0$。进一步假设每一散射元的实部和虚部统计独立并且有相同的方差，则场振幅R满足 Rayleigh 分布，而总场强度

$$I=|u(t)|^2$$

满足修正 Rice-Nakagami 分布[1]：

$$P_1(I)=\frac{1}{\langle I_N\rangle}\exp[-(I_s+I)/\langle I_N\rangle]\times I_0\left(\frac{2\sqrt{II_s}}{\langle I_N\rangle}\right),\quad I>0 \tag{3}$$

这里I_0是零阶第一类修正 Bessel 函数；$I_s=A^2$；$\langle I_N\rangle$是散射场的平均值，也是光场$U(t)$的方差，即

$$\begin{aligned}b&=\langle(U^2(t)-\langle U(t)\rangle^2)\rangle\\&=\langle(A^2+R^2+AR^*e^{i[\theta(t)-\phi(t)]}\\&\quad+A^*Re^{-i[\theta(t)-\phi(t)]}-A^2)\rangle\\&=\langle R^2\rangle=\sum_{j=1}^{N}\langle r_j^2\rangle=\langle I_N\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

Nakagami 对电磁波传播统计特性研究表明[7]，Rice-Nakagami 分布可以由M分布来近似，$P_1(I)$可表示为

$$P_2(I)=\frac{M^MI^{M-1}}{\Gamma(M)\langle I\rangle^M}\exp\left(-\frac{MI}{\langle I\rangle}\right)=P_2(I/\langle I\rangle) \tag{5}$$

这里$\langle I\rangle=I_s+\langle I_N\rangle$；$M=\langle I^2\rangle/(\langle I^2\rangle-I_s^2)$；$\Gamma(\cdot)$是 gamma 函数。

由于大尺度湍涡导致光束整体抖动的影响，检测到的平均光强$\langle I\rangle=I_A$也将是一个随机量。这是由于湍流造成光束的快速偏折导致光斑在接收面上随机游动和湍流散射导致光斑强度空间分布不均匀的缘故。所以，我们检测到的光强起伏概率分布，还应包含I_A的起伏概率。

由光束抖动的研究，我们知道光束在接收平面内束心的位置分布，从统计平均的观点上来说为一个圆，即光束束心在该圆内作随机移动。由运动相对性原理，我们可把观察基点固联在运动光束上，用接收孔径的运动代替光束抖动来分析I_A的概率分布。在湍流大气是均匀各向同性的气象条件下，设光束束心均衡地通过统计平均圆内各点。从统计意义上来说，这时接收孔径也在空间扫描出一个等面积的圆。

现考虑用点孔检测闪烁概率分布的情况。设孔径在圆内作扫描运动的周期为T。接收仪器的响应时间为T_0，由于在T_0内光场$U_A(t)$是一随机量，则检测到的强度I_A是一个随机量：

$$I_A=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|U_A(t)|^2dt \tag{6}$$

设接收到的光斑的光场振幅由大量互不相关的分振幅组成，这里的每一振幅元由若干相干光场分量构成，则振幅是复高斯随机量。

为求得I_A概率分布关系，我们用 Karhunen-Loéve 基展开$U_A(t)$，以展开式的系数来描述此随机量[8]。

在时间间隔$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$内，$U_A(t)$可用一组确定的完备正交函数$\{\psi_j\}(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$展开：

$$U_A(t)=\lim_{N\to\infty}t\sum_{j=0}^{N}C_j\psi_j(t)\quad |t|\leqslant\frac{T_0}{2} \tag{7}$$

这里

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\psi_j(t)\psi_j^*(t)dt=\delta_{ij},\ i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{8}$$

$$C_j=\int_{-T_0/2}^{T_0/2}U_A(t)\psi_j^*(t)dt\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{9}$$

其联合统计特征描述了$U_A(t)$本身的统计特性。设$U_A(t)\approx0$，在此近似下，可适当选择$\{\psi_j(t)\}$使得$\{C_j\}$互不相关，并且$\{\psi_j\}$是以$G(t-t')$为积分核的 Fredholm 方程的解：

$$\lambda_j'\psi_j(t)=\int_{-T_0/2}^{T_0/2}G(t-t')\psi_j(t')dt' \tag{10}$$

λ_j'是ψ_j基底的本征值，并有$\lambda_0'\geqslant\lambda_1'\geqslant\lambda_2'\cdots\geqslant0$，$\{\lambda_j'\}$决定了$\{C_i\}$的方差。

由概率理论，特征函数$\phi(\xi)$是概率密度的傅氏变换，即

$$\begin{aligned}\phi(\zeta)&=\int_{-\infty}^{\infty}P(I_A)\exp(i\zeta I_A)dI_A\\&=\langle\exp(i\zeta I_A)\rangle\end{aligned} \tag{11}$$

由式(6)和式(8)可得：

$$I_A=\frac{1}{T_0}\sum_{j=0}^{\infty}|C_j|^2 \tag{12}$$

把(12)式代入(11)式中$\phi(\zeta)$可写为：

$$\begin{aligned}\phi(\zeta)&=\left\langle\exp\left[i\zeta\frac{1}{T_0}\sum_{j=0}^{\infty}|C_j|^2\right]\right\rangle\\&=\prod_{j=0}^{\infty}\langle\exp(i\zeta|C_j|^2/T_0)\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

引入归一化本征值：$\lambda_j=\lambda_j'/T_0=\langle|C_j|^2\rangle/T_0$和运用(11)式的傅氏逆变换可求得$I_A$的概率密度函数：

$$\begin{aligned}P(I_A)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\zeta)\exp(-i\zeta I_A)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\zeta I_A)}{\prod_{j=0}^{\infty}(1-i\zeta\lambda_j)}d\zeta\end{aligned} \tag{14}$$

$$\langle I_A\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j。$$

如果在测量时间T_0内光斑相关函数降低不是很快，则称其为长期相关区域。在该区域内本征值$\{\lambda_j\}$是分离的：$\lambda_0>\lambda_1>\cdots\geqslant0$。运用留数理论，(14)

式可简化为

$$P(I_A)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d_j}{\lambda_j}\exp\left(-\frac{I_A}{\lambda_j}\right);\ I_A>0 \tag{15}$$

其中 $d_j=\prod_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{\infty}\lambda_j(\lambda_j-\lambda_m)^{-1}$。

一般地,(15)式所需条件总能满足(在强起伏区,可缩短 T_0 满足上述条件)。所以,(15)式可认为是光束抖动导致 I_A 起伏分布概率的"精确关系"。另外,当检测时间 T_0 足够长,其远大于光斑相关函数降至 e^{-1} 时对应的相关时间。在 T_0 时间内检测到的光强 I_A 由大量统计独立光束元构成,并且$\{\lambda_j\}$近似相等,在此条件下 $P(I_A)$ 简化为 gamma 概率分布:

$$P_3(I_A)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\langle I_A\rangle}\right)^{\alpha}I_A^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{\alpha I_A}{\langle I_A\rangle}\right)。\tag{16}$$

这里 α 是独立光束元数。实际上 gamma 分布与精确分布(15)式符合很好[9],可用 $P_3(I_A)$ 代替(15)式讨论激光大气闪烁概率分布问题。

三、光强起伏概率密度函数(PDF)

综合考虑湍流大气的光束抖动和散射效应后,用点接收孔径检测到的强度起伏概率密度函数由下式决定:

$$P(I)=\int P_2(I/I_A)P_3(I_A)dI_A,\ I>0 \tag{17}$$

在上式代入 P_2、P_3 的具体表达式后,可求得闪烁 PDF 的解析关系式

$$P(I)=\frac{2(\alpha M)^{(\alpha+M)/2}I^{(\alpha+M)/2-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(M)\langle I\rangle^{(M+\alpha)/2}}K_{M-\alpha}\left(2\sqrt{\frac{\alpha MI}{\langle I\rangle}}\right)。\tag{18}$$

这里 $K_{M-\alpha}$ 是第二类变形贝塞尔函数,在得出(18)式时已作变换 $\langle I_A\rangle=\langle I\rangle$。式(18)即为我们在文献[6]中用唯象法求得的 $K(\alpha)$PDF。

与 $K(\alpha)$PDF 相应的强度各阶矩为:

$$\langle I^n\rangle=\int_0^{\infty}P(I)I^n dI=\frac{\langle I\rangle^n\Gamma(n+M)\Gamma(n+\alpha)}{M^n\alpha^n\Gamma(M)\Gamma(\alpha)} \tag{19}$$

归一化闪烁方差为:

$$\sigma_I^2=\frac{\langle I^2\rangle-\langle I\rangle^2}{\langle I\rangle^2}=\left(1+\frac{1}{M}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-1。$$

强度的起伏分布函数则为

$$F(I)=\int_0^I P(I')dI'=\frac{2(\alpha M)^{(\alpha+M)/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(M)\langle I\rangle^{(M+\alpha)/2}}\int_0^I I'^{(\alpha+M)/2-1}\times K_{M-\alpha}\left(2\sqrt{\frac{\alpha MI'}{\langle I\rangle}}\right)dI' \tag{20}$$

利用积分恒等式

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\mu-1}K_{\nu}(a\sqrt{x})dx=2^{\nu-1}a^{-\nu}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+1+\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}{}_1F_2\left(\lambda+1-\frac{\nu}{2};1-\nu,\ \lambda+1+\mu-\frac{\nu}{2};\frac{a^2}{4}\right)$$
$$+2^{1-\nu}a^{\nu}\frac{\Gamma(-\nu)\Gamma(\mu)\Gamma\left(\lambda+1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+1+\mu+\frac{\nu}{2}\right)}{}_1F_2\left(\lambda+1+\frac{\nu}{2};1+\nu,\ \lambda+1+\mu+\frac{\nu}{2};\frac{a^2}{4}\right)$$
$$\left[\mathrm{Re}\,\lambda>-1+\frac{1}{2}|\mathrm{Re}\nu|,\ \mathrm{Re}\,\mu>0\right]$$

得到 $F(I)$ 的解析式:

$${}_1F(I)=\left(\frac{\alpha M}{\langle I\rangle}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(M-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(M)}I^{\alpha}{}_1F_2\left(\alpha;1-M+\alpha,\ 1+\alpha;\frac{\alpha MI}{\langle I\rangle}\right)+4\left(\frac{\alpha M}{\langle I\rangle}\right)^{M}\frac{\Gamma(\alpha-M)}{\Gamma(1+M)\Gamma(\alpha)}I^{M}{}_1F_2\left(M;1+M-\alpha,\ 1+M;\frac{\alpha MI}{\langle I\rangle}\right) \tag{21}$$

其中,${}_1F_2(a;b,c;d)$是超几何级数。

上面我们在推导时用了 $T\gg t_0'$ 似近,但实际上该条件可以放宽。所以 $K(\alpha)$ 分布能够适用于整个湍流起伏区,文献[6]的实验结果证实了这点。

参考文献

1 L. C. Andrews *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 3(11), 1912 (1986)
2 G. Parry *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, 69(5), 796 (1979)
3 E. Jakemen, R. J. A. Tourh., *J. Opt. Soc. Am.*, 4(9), 1764 (1987)
4 R. L. Phillips *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, 72(7), 864 (1982).
5 L. C. Andrews *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2(2), 160 (1985)
6 张逸新 *et al*, 科学通报, 33(10), 747(1988)
7 Nakagami, Statistical Methods in Radio Wave Propagation (Pergaman, New York, 1960), 3
8 B. 塞勒,光电子统计学(科学出版社,北京 1985),30
9 G. Parry, 激光斑纹及有关现象(科学出版社,北京, 1981), 77

(收稿日期:1987 年 12 月 25 日)