

## 锥形发散梯度折射率纤维透镜的成像特性\*

廖廷佛

(福建师范大学激光研究所, 福州)

Imaging characteristics of a conical defocusing  
gradient index fiber lens

Liao Tingdi

(Laser Institute, Fujian Normal University, Fuzhou)

**提要:** 从光线方程出发, 讨论一种圆锥形发散梯度折射率纤维透镜的成像特性。导出在纤维中光线轨迹的解析解, 并给出透镜的等效焦距、主平面位置、成像公式及纤维的有效长度计算结果。

**关键词:** 梯度折射率, 纤维透镜, 光学成像

## 一、引言

梯度折射率纤维微透镜在聚焦、望远、光盘读写及激光与单模光纤间的耦合等光学系统中相继得到了应用<sup>[1~3]</sup>。然而, 迄今为止, 大多数文献集中研究的是用聚焦型微透镜<sup>[4, 5]</sup>; 而对另一种相当于负透镜的发散纤维透镜的研究却很少见报道<sup>[6]</sup>。随着发散梯度折射率纤维制造工艺的成功, 研究其成像特性已成为必要, 本文探讨一种圆锥形发散纤维透镜的成像特性。

## 二、锥形发散纤维中的光线轨迹

考虑一锥形发散梯度折射率纤维, 厚度为  $d$ , 大端面、小端面分别位于坐标  $z$  轴上的  $z=0$  和  $z=d$  处; 两端面为平行平面, 半径为

$r_1, r_2$ 。取直角坐标  $(x, y, z)$ , 且  $z$  轴与纤维光轴重合。则纤维的折射率分布为

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 + g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (1)$$

式中  $n_0$  为纤维轴中心处的折射率,  $g(z)$  为纤维沿  $z$  轴的梯度参数:

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - \frac{z}{L}} = \frac{g_0}{t(z)} \quad (2)$$

式中  $g_0 = g(0)$ ,  $t(z) = 1 - \frac{z}{L}$ ,  $L$  为纤维大端面到锥顶点的距离。在  $x-y$  面上, 折射率自轴心沿径向按抛物线型增加, 而等折射率面为一圆锥面, 顶点位于光轴上  $z=L$  处。如图 1 为其  $x-y$  面内的折射率分布状况。

收稿日期: 1987年11月2日。

\* 福建省自然科学基金资助项目。

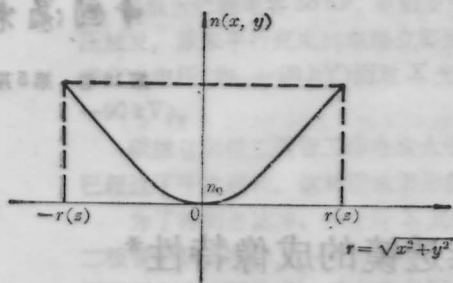


图1 锥形发散梯度折射率纤维的折射率分布

根据变分法原理并采取适当近似可得在纤维  $x-z$  面内光线方程:

$$\ddot{x}(z) - g^2(z) \cdot x(z) = 0 \quad (3)$$

式中  $\ddot{x}(z)$  表示  $x(z)$  对  $z$  的二阶导数, 引进如下参变量:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \ln t(z) \\ x(z) &= F(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则(3)式可化为

$$\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} - \frac{dF(\theta)}{d\theta} - (g_0^2 L^2) \cdot F(\theta) = 0 \quad (5)$$

方程(5)的两个特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm b, \quad b = \sqrt{(g_0 L)^2 + \frac{1}{4}}$$

其解为

$$F(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta} [A \operatorname{ch}(b\theta) + B \operatorname{sh}(b\theta)]$$

利用(4)式, 上式可化为

$$x(z) = \sqrt{t(z)} [A \operatorname{ch}(b \ln t(z)) + B \operatorname{sh}(b \ln t(z))] \quad (6)$$

式中  $A$ 、 $B$  为两个由光线初始条件确定的系数。如光线在大端面上的入射位置及其与光轴的交角为

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ n_0 \dot{x}(0) &= n_0 P_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

则由(6)和(7)式可解得:

$$\left. \begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= -\frac{1}{b} \left( L P_0 + \frac{1}{2} x_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(8)代入(6), 并求出  $\dot{x}(z)$  得:

$$x(z) = \sqrt{t(z)} \left[ \left( \operatorname{ch} \alpha - \frac{1}{2b} \operatorname{sh} \alpha \right) x_0 - \left( \frac{L}{b} \operatorname{sh} \alpha \right) P_0 \right] \quad (9)$$

$$\dot{x}(z) = \left[ \left( -\frac{L}{b} g_0^2 \operatorname{sh} \alpha \right) x_0 + \left( \operatorname{ch} \alpha + \frac{L}{2b} \operatorname{sh} \alpha \right) P_0 \right] \quad (10)$$

考虑两条特定光线, 光线 I 平行于光轴入射, 初始条件为  $x(0) = x_0$ ,  $P_0 = 0$ ; 光线 II 在端面轴中心处入射,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}(0) = P_{00}$  它们的轨迹方程分别为

$$\left. \begin{aligned} x_I(z) &= \sqrt{t(z)} \left( \operatorname{ch} \alpha - \frac{1}{2b} \operatorname{sh} \alpha \right) x_0 \\ \dot{x}_I(z) &= -\left( \frac{L}{b} g_0^2 \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \operatorname{sh} \alpha \right) x_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

和

$$\left. \begin{aligned} x_{II}(z) &= -\left( \frac{L}{b} \sqrt{t(z)} \operatorname{sh} \alpha \right) P_0 \\ \dot{x}_{II}(z) &= \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \left( \operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{2b} \operatorname{sh} \alpha \right) P_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $\alpha = b \ln t(z)$ 。

图 2(a)、(b) 给出了光线 I、II 在锥形

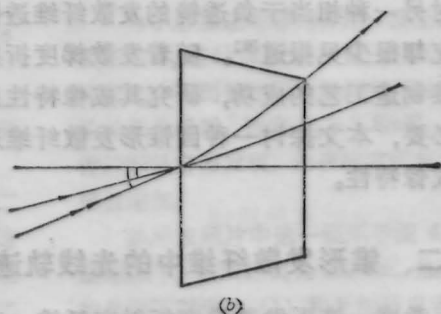
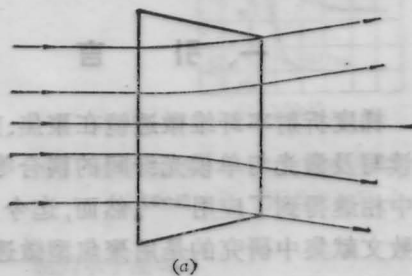


图2 锥形发散纤维中的光线轨迹  
(a) 平行于轴的光线; (b) 与轴有夹角且在轴上入射的子午光线

发散纤维中的传播轨迹。

### 三、锥形发散纤维的有效长度

计算表明, 光线轨迹  $x(z)$  随着  $z$  增大而迅速向边缘发散。可以预见, 光线在纤维中随着传播距离的增加很快发散到纤维边缘而逸出。光线发散到纤维边缘时的纤维长度即为纤维的有效长度。

对锥形纤维, 不同  $z$  值截面上的半径

$$r_z = r_1 \left(1 - \frac{z}{L}\right),$$

当光线在  $z$  处的垂轴高  $x(z) > r_z$  时, 就逸出纤维。故以  $x(z) = r_z$  代入 (9) 并化简得:

$$\left[ x_0 - \frac{1}{b} \left( LP_0 + \frac{1}{2} x_0 \right) \right] t^{2b} - 2r_1 t^{b+1/2} + \left[ x_0 + \frac{1}{b} \left( LP_0 + \frac{1}{2} x_0 \right) \right] = 0 \quad (13)$$

用数值迭代法解之得  $t$  值, 从而求得锥形发散纤维的有效长度  $d_e = (1-t)L$ 。

从 (13) 易见, 对给定的纤维 ( $g_0, r_1, r_2, d$  一定), 有效长度与光线的初始条件  $x_0, P_0$  有关。不同的成像光线对应的有效长度也不同。

由于用来成像的光线必须能到达像空间, 因之纤维的厚度不应大于有效长度  $d_e$ , 或者说, 有效长度  $d_e$  的限制决定了成像光束的孔径和视场。图 3 给出了不同光线对应的有效长度示意。

对一定的入射光线 ( $x_0 = \frac{1}{2} r_1, P_0 = 0$ ), 有效长度  $d_e$  取决于  $r_1, r_2, d$  和  $g_0$ 。表 1 为几种不同纤维的  $d_e$  值。表中  $g_0$  的取值通常根据锥面边缘折射率与中心折射率之差  $\Delta n$  的取值而定。即

$$\Delta n = \frac{1}{2} n_0 (g_0 r_1)^2,$$

$r_1$  越大时  $g_0$  就越小。表中诸纤维的

$$d = 0.7, \frac{\Delta n}{n_0} = 0.21125$$

或  $g_0 r_1 = 0.65$ 。

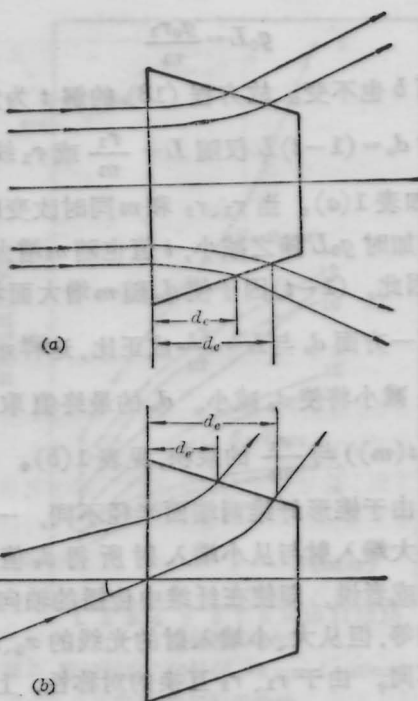


图 3 锥形发散纤维的有效长度  
(a) 平行于轴的光线; (b) 与轴有一定夹角的子午光线

表 1(a) 锥度  $m$  一定时不同半径纤维的有效长度

$r_1$	0.50	0.70	1.00	1.50	1.70	2.00	2.50
$r_2$	0.325	0.525	0.825	1.325	1.525	1.825	2.325
$L$	2.0	2.8	4.0	6.0	6.8	8.0	10.0
$d_e$	0.593	0.834	1.192	1.787	2.026	2.383	2.979

表 1(b) 几种不同纤维的有效长度

$r_1$	$r_2$	$m$	$L$	$g_0 L$	$t(m)$	$d_e$
0.90	0.87	0.06	15.90	11.43	0.90	1.603
0.80	0.73	0.10	8.00	6.50	0.84	1.285
0.70	0.56	0.20	3.50	3.25	0.74	0.916
1.00	0.825	0.25	4.00	2.60	0.702	1.192
1.20	0.87	0.47	2.55	1.38	0.603	1.004
1.50	1.08	0.60	2.50	1.03	0.577	1.053
1.00	0.50	0.71	1.40	0.91	0.530	0.617

当  $r_1, r_2$  改变但保持锥度

$$m = \frac{r_1 - r_2}{d}$$

不变时, 因  $g_0 r_1 = 0.65$  为常数, 因此

$$g_0 L = \frac{g_0 r_1}{m}$$

从而  $b$  也不变。故方程 (13) 的解  $t$  为定值, 这时  $d_e = (1-t)L$  仅随  $L = \frac{r_1}{m}$  或  $r_1$  线性变化, 如表 1(a)。当  $r_1, r_2$  和  $m$  同时改变时, 如  $m$  增加时  $g_0 L$  随之减小,  $t$  值也随  $m$  增大而减小。因此,  $(1-t)$  因子使  $d_e$  随  $m$  增大而增大, 但另一方面  $d_e$  与  $L = \frac{r_1}{m}$  成正比, 这样  $m$  增加或  $r_1$  减小将使  $d_e$  减小。 $d_e$  的最终值取决于  $(1-t(m))$  与  $\frac{r_1}{m}$  的乘积, 见表 1(b)。

由于锥形纤维两端面半径不同, 一定光线从大端入射与从小端入射所得  $d_e$  值也不同。或者说, 即使在纤维中传播的轴向距离  $d_e$  相等, 但从大、小端入射的光线的  $x_0, P_0$  却可不同。由于  $r_1, r_2$  互换的对称性, 上面导出的公式 (9)、(10) 和 (13) 作变换  $r_1 \rightleftharpoons r_2$  及  $g_0 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} g_0$  后即可得到光线从小端入射时相应的公式。表 2 给出了几条从小端入射的平行光线的有效长度  $d_{e3}$  结果。

表 2 光线从小端入射时纤维的有效长度

$x_{02}/r_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
$d_{e2}$	1.183	1.901	2.960	3.824	4.585	5.912

#### 四、锥形发散纤维的成像定律

设物体  $AB$  位于入射端面前  $l_0$  处, 物高为  $x_0$ , 经纤维所成的像  $A'B'$  位于距出射端面  $l'_0$  处, 像高为  $x$ ,  $A, A'$  位于光轴上, 如图 4 所示。考虑从物体上  $B$  点发出的两条光线  $I$  和  $II$ , 其轨迹由 (11) 和 (12) 式给出。从图知

$$-n_0 P_0 = \operatorname{tg} \theta_e = \frac{x_0}{(-l_0)},$$

即光线  $II$  的斜率

$$P_0 = \frac{x_0}{n_0 l_0},$$

求出光线  $I$  与  $II$  在出射处的位移和斜率即

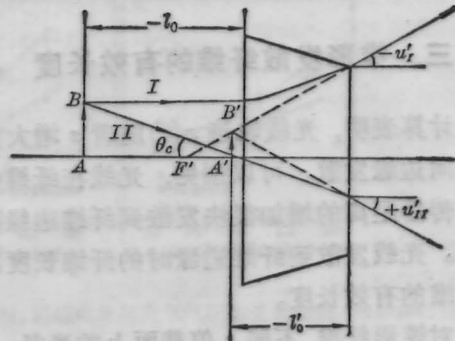


图 4 锥形发散纤维的成像光路

可得到两条光线的交点, 从而确定像的位置和大小。

光线  $I, II$  出射后的直线方程为:

$$\left. \begin{aligned} x_I &= x + n_0 x_I (-l'_0) \\ x - x_{II} &= (-n_0 \cdot x_{II}) (-l'_0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由 (14) 求解得

$$\begin{aligned} l'_0 &= \frac{x_{II} - x_I}{n_0 (x_I - x_{II})} \\ x &= \frac{x_I x_{II} - x_I x_{II}}{x_I - x_{II}} \end{aligned}$$

将 (11)、(12) 及  $P_0 = \frac{x_0}{n_0 l_0}$  代入上两式得像距  $l'_0$

$$l'_0 = \frac{t \left[ l_0 \operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{b} \left( \frac{L}{n_0} - \frac{l_0}{2} \right) \operatorname{sh} \alpha \right]}{\operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{b} \left( g_0^2 L l_0 n_0 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sh} \alpha} \quad (15)$$

像的放大率  $\beta = \frac{x}{x_0}$ :

$$\beta = \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{b} \left( g_0^2 L l_0 n_0 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sh} \alpha} \quad (16)$$

对一定厚度  $d$  的锥形发散纤维,  $x = d$ 。以上诸式中

$$t = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \quad \alpha = b \ln \frac{r_2}{r_1},$$

下同。

当  $l'_0 > 0$  时为实像,  $l'_0 < 0$  时为虚像;  $\beta > 0$  为正像,  $\beta < 0$  为倒像。由 (15)、(16) 知, 对一定锥形发散纤维, 大多有  $l'_0 < 0$ ,  $0 < \beta < 1$ , 即成正立虚像。

由 (15) 式可得成像在无限远 ( $l'_0 \rightarrow \infty$ ) 的

物距,即大端焦点的位置:

$$l_f = \frac{b \operatorname{ch} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (17)$$

由(16)式得成像在主面上( $\beta=1$ )的物距,即大端主面的位置:

$$l_h = \frac{b_1(\operatorname{ch} \alpha - \sqrt{t}) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (18)$$

因此,大端的焦距为

$$f = l_f - l_h = -\frac{b\sqrt{t}}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (19)$$

利用 $r_1$ 、 $r_2$ 互换的对称性可得小端的焦点、主点位置和焦距:

$$l'_f = \frac{t(b \operatorname{ch} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha)}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (20)$$

$$l'_h = \frac{t[b(\operatorname{ch} \alpha - \sqrt{t^{-1}}) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha]}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (21)$$

$$f' = \frac{b\sqrt{t}}{g_0^2 L m_0 \operatorname{sh} \alpha} \quad (22)$$

如物距和像距以主点为基准计算,即

$$l = l_0 - l_h \quad (23)$$

$$l' = l'_0 - l'_h \quad (24)$$

则(15)式化为如下成像公式(即高斯公式):

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \quad (25)$$

当锥度 $m$ 为零(即 $r_1=r_2$ )时,锥形成为

(上接第262页)

反射方式也同样适用。由设计简例部分给出的位相片尺寸在20mm见方的范围,这样的范围内制取 $64 \times 64$ 个位相点对电子束曝光等方法其精度是可完全满足的。特别是电子束曝光,其精度是nm的数量级,制作工艺上不会有原则困难。

本文给出了 $TEM_{10}$ 模的结果,不难想像 $TEM_{01}$ 应完全相同。至于 $TEM_{11}$ 以上的高次模,由于双模情况已被证明且采用的是二维变换,故可推广。但计算量将会增加。可以设想采用多元件组合技巧将高次模逐次降低的变换方式。这样适应性更强。当然将因

圆柱形发散纤维,令 $L \rightarrow \infty$ ,即用

$$\frac{1}{L} = 0, \quad \frac{b}{L} = g_0$$

以及  $b \ln\left(1 - \frac{z}{L}\right) = -g_0 z$

代入前面公式即可得到柱形发散纤维的有关结果<sup>[3]</sup>。如柱形发散纤维的焦距为:

$$f'_c = -f_c = -\frac{1}{g_0 n_0 \operatorname{sh}(g_0 d)} \quad (26)$$

计算比较 $f'_c$ 与锥形的 $f'$ 值可知, $|f'_c| > |f'|$ ,且当锥度 $m$ 越大时, $f'_c$ 与 $f'$ 之差也越大。因此,在同样纤维厚度下,采用锥形可获得比柱形更大的负光焦距;或者说,满足同样的光焦距要求,用锥形的结构比用柱形的小。此外,用锥形发散纤维与聚焦型纤维组合设计的光学系统,不仅可增大孔径和视场,还可改善其像质,因此,锥形发散纤维元件也将是微型光学成像系统的重要元件之一。

感谢林金豆先生所给予的帮助。

### 参 考 文 献

- 1 J. B. Caldwell et al., *Appl. Opt.*, **25**(19), 3345~3350 (1986)
- 2 H. Nishi et al., *Appl. Opt.*, **25** (19), 3340~3344 (1986)
- 3 I. Kitano et al., *Appl. Opt.*, **25**(19), 3336~3339 (1986)
- 4 J. D. Rees, *Appl. Opt.*, **21** (6), 1009~1012 (1982)
- 5 C. Gomez-Reino et al., *Appl. Opt.*, **25** (19), 3418~3432 (1986)
- 6 殷宗敏, *激光*, **9**(2), 65~68 (1982)

材料的吸收会使转换率降低。

由于我们的元件设计就单一波长进行,对多纵模情况例如二个波长的器件,可以设想对每一波长设计一种元件,用二元件的组合来改变激光波面。

### 参 考 文 献

- 1 P. W. Rhodes, *Appl. Opt.*, **19**, 3545 (1980)
- 2 W. H. Lee, *Opt. Commun.*, **36**, 469 (1981)
- 3 J. P. Girardeau-Montaut, *Opt. Commun.*, **57**, 161 (1986)
- 4 梁向春,陈泽尊, *光学学报*, **5**, 761 (1985)
- 5 李永平,董辉,姚焜, *光学学报*, **8**, 991 (1983)
- 6 徐荣甫,刘敬海, *激光器件与技术教程*(北京工学院出版社), 1986年