在自滤光非稳腔中用方孔作空间滤光时基横模的近似解析解*

T. Letardi
(ENEA, Dip. TIB, U. S. Fisica Applicata, C. R. E. Frascati, C. P. 65-00044 Frascati, Rome (Italy))

郑 承 恩
(中国科学院上海光机所)

Approximate analytical solution of a SFUR resonator with a square hole filter for the lowest-transverse mode

T. Letardi
(ENEA, Dip. TIB, U. S. Fisica Applicata, C. R. E. Frascati, C. P. 65-00044 Frascati, Rome (Italy))

Zheng Chen'en
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

提要：本文描述了在非激活自滤光非稳腔的空间滤光器为方孔情形时的基横模的近似解析解。

关键词：自滤光非稳腔，方孔

所谓自滤光非稳腔(SFUR)即是在负支共焦非稳腔的两个腔镜的公共焦点处放置一个有一定规格要求的光阑[1,2]，至今所有这类研究处理的都是具有圆孔的硬光阑[1~4]。可是在某些激光器中活性介质横截面常常具有方形或矩形，为了使模体积与激光活性介质有更好的匹配，自滤光非稳腔的光阑应具有方形或矩形孔。本文即描述这类腔的一些近似解析解。

从惠更斯-菲涅耳原理的菲涅耳近似公式出发，并认为自滤光非稳腔是由一系列凸透镜与空间光阑组成的传输介质(图1)，我们可以在直角坐标系统中得到两个描述光场的联立方程[5]：

$$U_1(x,\ y)=\frac{e^{2jkf_2}}{j\lambda f_2}\int_{-a}^{+a}dx'\int_{-b}^{+b}dy'\,U_0(x',\ y')\times e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f_2}(xx'+yy')};\tag{1}$$

$$\gamma U_0(x,\ y)=\frac{e^{2jkf_1}}{j\lambda f_1}\int_{-a}^{+a}dx'\int_{-b}^{+b}dy'\,U_1(x',\ y')\times e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f_1}(xx'+yy')}。\tag{2}$$

式中 $U_0(x,\ y)$ 与 $U_1(x,\ y)$ 分别是位于空间光阑之前与之后的光场；γ 表示光束在光腔内来回反射一次后所经受的衰减与相移；λ

收稿日期：1987年11月17日。

* 本工作是在 ENEA Frascati research center 完成的。

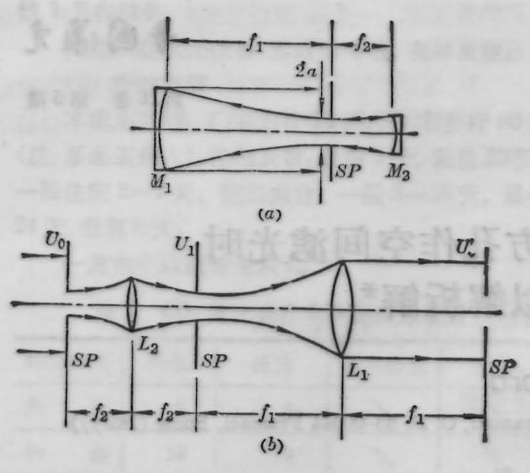

图1　自滤光非稳腔示意图(a)以及与它等效的透镜和空间滤光器组合系列(b)
(M_1与M_2分别是焦距为f_1与f_2的全反射凹面反射镜，SP是位于两镜公共焦点处的空间滤光器)

是光波长；

$$k=2\pi/\lambda;\quad j=\sqrt{-1};$$

$2a$与$2b$分别是空间滤光器小孔的全宽度与长度。

如[6]那样，处理的是腔内存在圆孔光阑时的近似求解情形，对于方孔，我们假定最低级腔横模近似表示为：

$$U_0(x,\ y)=e^{-\alpha x^2-\beta y^2},\tag{3}$$

式中参量α与β是可以用腔参量表示的待定量。

进一步，我们可把$U_1(x,\ y)$表示为如下两部分乘积，即

$$U_1(x,\ y)=X_1(x)\cdot Y_1(y)。\tag{4}$$

由方程(4)，式(1)与(2)可化为

$$X_1(x)=\frac{1-j}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{jkf_2}}{\sqrt{\lambda f_2}}\times\int_{-a}^{+a}e^{-\alpha x'^2-j\frac{2\pi}{\lambda f_2}xx'}dx'\tag{5}$$

和

$$\gamma_x e^{-\alpha x^2}=\frac{1-j}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{jkf_1}}{\sqrt{\lambda f_1}}\int_{-a}^{+a}X_1(x')\times e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f_1}xx'}dx',\tag{6}$$

类似地也可得$Y_1(y)$的两个联立的积分方程。若下述不等式成立：

$$\alpha x^2+\beta y^2\ll 1\tag{7}$$

则$X_1(x)=e^{-\alpha x^2}$可用其级数展开的头两项近似，即

$$X_1(x)=1-\alpha x^2+\cdots\cdots\tag{8}$$

在此近似下，代入方程(5)，即得

$$X_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\lambda f_2}}{\sqrt{2}\pi}(1-j)e^{jkf_2}\Big[(1-\alpha a^2)\dfrac{\sin(\eta ax)}{x}\\ \quad-\dfrac{2\alpha}{\eta}\Big(\dfrac{a\cos(\eta ax)}{x^2}-\dfrac{\sin(\eta ax)}{\eta x^3}\Big)\Big]\\ \text{for } x\neq 0;\\ \dfrac{\sqrt{\lambda f_2}}{\sqrt{2}\pi}(1-j)e^{jkf_2}\\ \quad\times\eta a\Big(1-\dfrac{1}{3}\alpha a^2\Big)\quad \text{for } x=0,\end{cases}\tag{9}$$

式中

$$\eta=\frac{2\pi}{\lambda f_2}。\tag{10}$$

若不等式

$$\frac{2\pi}{\lambda f_1}a^2<1\tag{11}$$

成立，则在方程(6)中积分号内的$e^{-j(2\pi/\lambda f_1)xx'}$可近似地用其级数展开的头四项表示，即

$$e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f_1}xx'}=1-j\frac{2\pi xx'}{\lambda f_2 M}-2\Big(\frac{\pi xx'}{\lambda f_2 M}\Big)^2+j\frac{4}{3}\Big(\frac{\pi xx'}{\lambda f_2 M}\Big)^3+\Big(\frac{1}{M^4}\Big),\tag{12}$$

式中$M=|f_1/f_2|$是放大因子；$(1/M^4)$为小量，可近似为O。把式(9)与(12)代入方程(6)，最终可得如下结果：

$$\begin{aligned}2\pi j\cdot\sqrt{M}e^{-jk(f_1+f_2)}\gamma_x(1-\alpha x^2)\\ =4S_i(\eta a^2)-\frac{4\alpha}{\eta^2a^2}\sin(\eta a^2)\\ +\frac{4\alpha}{\eta}\cos(\eta a^2)\\ +\frac{4\pi(1-\alpha a^2)x^2}{\lambda f_2M^2}\cos(\eta a^2)\\ -\frac{2(1-\alpha a^2)x^2}{a^2M^2}\sin(\eta a^2)\\ +\frac{4\alpha x^2}{M^2}[\sin(\eta a^2)-S_i(\eta a^2)],\end{aligned}\tag{13}$$

式中

$$S_i(x)=\int_0^x \frac{\sin z}{z}\,dz。\tag{14}$$

由于方程(13)两边 x^0 项与 x^2 项的系数应保持相等，我们可得如下两方程：

$$\begin{aligned}\gamma_x=&\frac{-2je^{jk(f_1+f_2)}}{\pi\sqrt{M}}S_i(\eta a^2)\\&+\frac{2je^{jk(f_1+f_2)}}{\pi\sqrt{M}}\frac{\alpha}{\eta^2a^2}\sin(\eta a^2)\\&-\frac{2je^{jk(f_1+f_2)}}{\pi\sqrt{M}}\frac{\alpha}{\eta}\cos(\eta a^2),\end{aligned}\tag{15}$$

和

$$\begin{aligned}&\alpha^2\Big[\frac{\lambda f_2}{2\pi}\cos(\eta a^2)-\frac{\lambda^2f_2^2}{4\pi^2a^2}\sin(\eta a^2)\Big]\\&+\alpha\Big[S_i(\eta a^2)-\frac{\pi a^2}{\lambda f_2M^2}\cos(\eta a^2)\\&+\frac{1}{2M^2}\sin(\eta a^2)\\&+\frac{1}{M^2}[\sin(\eta a^2)-S_i(\eta a^2)]\\&+\Big[\frac{\pi}{\lambda f_2M^2}\cos(\eta a^2)\\&-\frac{1}{2M^2a^2}\sin(\eta a^2)\Big]=0\end{aligned}\tag{16}$$

由方程(15)与(16)可以很容易求得 α 与 γ_x 的数值，类似地可以得到 γ_y 的值。

在自滤光非稳腔情况，按照空间滤光器小孔尺寸的定义[1,2]，我们可把它表示为

$$a^2=b^2=0.5\lambda f_2。\tag{17}$$

关于 α 的二次方程(式(16))的解可表示为

$$\alpha=\frac{\pi}{2S_i(\pi)M^2a^2}\Big(1+\Big(\frac{1}{M^2}\Big)\Big),\tag{18}$$

式中 $(1/M^2)$ 是近似为 0 的小量。或直接地近似表示为

$$\alpha\approx\frac{0.8484}{M^2a^2}。\tag{19}$$

光束在腔内每来回反射一次的内反馈传输系数是

$$\begin{aligned}\gamma=\gamma_x\gamma_y=&\frac{-4}{\pi^2}\frac{e^{2jk(f_1+f_2)}}{M}S_i^2(\pi)\\&\times\Big[1-\frac{1}{2S_i^2(\pi)M^2}+\Big(\frac{1}{M^4}\Big)\Big]^2。\end{aligned}\tag{20}$$

光束在腔内每来回反射一次经历的功率损耗是

$$\begin{aligned}1-|\gamma|^2=1-&\frac{16}{\pi^4}\frac{S_i^4(\pi)}{M^2}\\&\times\Big[1-\frac{1}{2S_i^2(\pi)M^2}\\&+\Big(\frac{1}{M^4}\Big)\Big]^4,\end{aligned}\tag{21}$$

亦可表示为

$$1-|\gamma|^2\approx1-\frac{1.9305}{M^2}\Big(1-\frac{0.5834}{M^2}\Big)。\tag{22}$$

方程(18～22)是在自滤光非稳腔情况的近似结果。现在讨论条件(11)式所引入的近似性。显然，在自滤光非稳腔情况，(11)式可写成

$$\frac{2\pi}{\lambda f_1}a^2=\frac{\pi}{M}<1。\tag{23}$$

由于展开式(12)中 xx' 的奇次项(即虚部)贡献为 0，故只需考虑式(12)中的偶次项(即实部)贡献即可。事实上，即便 $M=3.5$，展开式(12)的近似性也很好。这时，可极易证明下式成立：

$$\frac{(1/M^4)_{real}}{(e^{-j2\pi xx'/\lambda f_1})_{real}}<5\%。$$

参 考 文 献

1 P. G. Gobbi, G. C. Reali, *Opt. Commun.*, **52**, 195(1984)

2 P. G. Gobbi, S. Morosi *et al.*, *Appl. Opt.*, **24**, 26 (1985)

3 R. Barbini, A. Ghigo *et al.*, *Opt. Commun.*, **60**, 239 (1986)

4 P. Di. Lazzaro, T. Hermsen *et al.*, *Opt. Commun.*, **61**, 393 (1987)

5 J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, (McGraw-Hill Book Company, New York, cf.) 4.1 and 5.2

6 K. E. Oughstum, P. A. Slaymaker *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-19**, 1558 (1983)