中国激光
第16卷 第3期

等离子体细丝中光束传播的正则模分析*

顾 敏 谭维翰
（中国科学院上海光机所）

Normal mode analysis of laser beams propagating in a plasma filament

Gu Min, Tan Weihan
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

提要：用正则模分析方法，讨论了激光等离子体细丝中的激光束传播问题；用微扰理论求出在轴向和径向都有密度分布的等离子体细丝中激光束传播的解。

关键词：等离子体，正则模，微扰理论

一、引 言

在激光打靶实验中，会产生大尺度等离子体。当入射激光波面不均匀或靶面粗糙时，由于有质动力[1]、热效应[2]或电子加速的相对论效应[3]等不稳机制的作用，在沿入射激光方向形成许多等离子体细丝[1~3]。这些细丝的形成使细丝内部的光强增强，导致很强非线性效应，不利于聚变等离子的压缩。因此，近年来，许多作者开始从实验和理论方面研究等离子体细丝对散射波、谐波、共振吸收所带来的影响[4~6]。要弄清这些影响，首先要了解激光束在等离子体细丝中的传播行为。文献[7]研究了激光束在等离子柱中的传播问题，这种等离子体柱沿径向（r 方向）有一个关于轴对称的二次函数密度分布，而等离子体沿轴向是均匀分布的，在这种情况下，得到了光束传播的解。事实上，在等离子体细丝中，除了在径向有一个密度分布外，在轴向还有一个密度梯度。本文就是研究在等离子体细丝中激光束的传播问题。

二、等离子体细丝中激光束的正则模分析

参照文献[7]，在等离子体细丝中，电场所满足的方程

$$c^2\left[\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)\right]+(\omega^2-\omega_p^2(r,z))E(r,z)=0 \quad (1)$$

在这里已假定电场矢量在 x 方向，ω 是光场的频率。若等离子体细丝在径向（r 方向）有一个关于 z 轴对称的二次函数密度分布；在轴向（z 方向）有一个线性密度梯度（见图 1），则电子密度 $N_e(r, z)$ 可以表示为

$$N_e(r,z)=N_e(0)\left(1+\frac{z}{L}\right)\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2)$$

收稿日期：1987 年 8 月 24 日。
* 本课题由中国科学院自然科学基金资助。

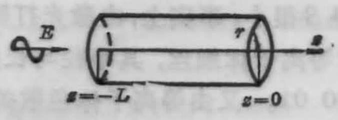

图 1

式中 $N_e(0)$ 是 $z=0$、$r=0$ 处的密度；L 是 z 方向的等离子体特征长度；常数 a 是细丝的半径。由于

$$\omega_p^2(r,\ z)=4\pi e^2 N_e(r,\ z)/m \tag{3}$$

设电场 E 为

$$E(r,\ z)=\varepsilon(r,\ z)\exp(ikz) \tag{4}$$

将(2)～(4)式代入方程(1)，并作慢变振幅近似，即略去 $\partial^2\varepsilon/\partial z^2$，便有

$$2ik\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\frac{\omega_p^2(0)}{c^2}\times\left(\frac{z}{L}+\frac{r^2}{a^2}+\frac{zr^2}{La^2}\right)\varepsilon=0 \tag{5}$$

式中已用了色散关系 $\omega^2=c^2k^2+\omega_p^2(0)$，并有

$$\omega_p^2(0)=4\pi e^2 N_e(0)/m。 \tag{6}$$

令

$$t=kz,\quad x=r^2/w^2$$
$$K=\omega_p(0)/cak,$$
$$w=(\omega_p(0)/ca)^{-\frac{1}{2}}=(Kk)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$
$$\alpha=ka^2/L,\quad \beta=cak/\omega_p(0)L$$

作了这些变换后，在 $t=-t_0=-kL$ 时为激光光束入射的界面，即 $z=-L$。方程(5)变为

$$2i\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+4\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-(\alpha t+x+\beta tx)\varepsilon=0 \tag{8}$$

如果在方程(8)中不计交叉项 $\beta tx\varepsilon$，则用分离变量法，可以求出其正则模式。令

$$\varepsilon(x,\ t)=X(x)T(t) \tag{9}$$

把它代入方程(8)，有

$$2i\frac{\partial T}{T\partial t}-\alpha t=m' \tag{10}$$

$$4\frac{1}{X}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial X}{\partial x}\right)-x=-m' \tag{11}$$

很容易求得它们的解为

$$T=e^{-i(2m+1)t-i\frac{\alpha}{4}t^2} \tag{12}$$

$$X=l_m(x)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \tag{13}$$
$$m'=2m+1$$

式中 $l_m(x)=L_m(x)/m!$ 是归一化的 m 阶 Laguerre 多项式[8]。由(9)、(12)、(13)式，得出

$$\varepsilon_m(x,\ t)=l_m(x)\exp\left[-\frac{x}{2}-i(2m+1)ti-\frac{\alpha}{4}t^2 i\right] \tag{14}$$

一般的解应对 ε_m 求和，即

$$\varepsilon(x,\ t)=\sum_m c_m\varepsilon_m(x,\ t) \tag{15}$$

式中 c_m 是迭加系数，由边界条件而定。假如在等离子体边界 $t=-t_0$ 处，有一个高斯光束 $\varepsilon(x,\ -t_0)=\varepsilon_0\exp(-x/2P)$ 入射，则由 $l_m(x)$ 的正交归一条件求[8]求得迭加系数 C_m 为

$$C_m=\varepsilon_0\exp\left[-(2m+1)t_0 i+\frac{\alpha}{4}t_0^2 i\right]\frac{2p}{1+p}\cdot\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^m \tag{16}$$

代入(15)式，并用(14)式可得

$$\varepsilon(x,\ t)=\varepsilon_0\frac{p}{p\cos(t+t_0)+i\sin(t+t_0)}\times\exp\left[-\frac{\alpha}{4}i(t^2-t_0^2)\right]\times\exp\left[\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos(t+t_0)+ip\sin(t+t_0)}{p\cos(t+t_0)+i\sin(t+t_0)}\right] \tag{17}$$

三、等离子体细丝中光束的微扰解

如果在方程(8)中考虑交叉项 $\beta tx\varepsilon$，则系数 C_m 应为 t 的函数。在这种情况下，方程(8)的一般解为

$$\varepsilon(x,\ t)=\sum_m c_m(t)\varepsilon_m(x,\ t) \tag{18}$$

把(18)式代入方程(8)，便有

$$\frac{dC_m(t)}{dt}=-\frac{i}{2}\sum_n H_{mn}\times\exp[2i(m-n)t]\beta tC_n(t) \tag{19}$$

式中矩阵元 H_{mn} 满足下式

$$H_{mn}=\int_0^\infty e^{-x}l_m(x)l_n(x)x\,dx \tag{20}$$

利用 Lagureer 函数的递推关系[8]很容易得到

$$H_{mn}=[(2n+1)\delta_{m,n}-n\delta_{m,n-1}-(n+1)\delta_{m,n+1}] \tag{21}$$

故方程(19)变为

$$\frac{dC_m(t)}{dt}=-\frac{i}{2}\beta t[(2m+1)C_m-(m+1)C_{m+1}e^{-2it}-mC_{m-1}e^{2it}] \tag{22}$$

现在我们寻找一个解，使 $C_m(t)$ 与无交叉项时的 C_m(即(16)式)有相同的形式，即

$$C_m(t)=C(t)[F(t)e^{+2it}]^m \tag{23}$$

则对应于高斯光束入射的情况，参照(16)式，可得 $C_m(t)$ 的边界条件为

$$C(-t_0)=\varepsilon_0 e^{-t_0 i+\frac{\alpha}{4}t_0^2 i}\cdot\frac{2p}{1+p} \tag{24}$$

$$F(-t_0)=\frac{1-p}{1+p} \tag{25}$$

把(23)式代入方程(22)，化简后，有

$$\frac{dC}{dt}+m\left(\frac{dF}{Fdt}+2i\right)=-\frac{i}{2}\beta t\left[(2m+1)-(m+1)F-m\frac{1}{F}\right] \tag{26}$$

由于此方程对所有 m 都有立，则 $F(t)$ 和 $C(t)$ 满足

$$\frac{dC}{Cdt}=-\frac{i}{2}\beta t(1-F) \tag{27}$$

$$\frac{dF}{dt}=-2iF+\frac{i\beta}{2}t(1-F)^2 \tag{28}$$

对方程(27)作变换

$$C=C_0(t)e^{-\frac{i}{4}\beta t^2} \tag{29}$$

则(27)式变成

$$\frac{dC_0}{dt}=\frac{i}{2}\beta tFC_0 \tag{30}$$

一般来说，方程(28)和(29)是难以求得其精确解。数值计算表明：$F(t)$ 和 $C_0(t)$ 都随 t 的增大而振荡，且振荡频率也随 t 增大，这就要数值积分的步长随 t 迅速变小，所以难以给出数值计算曲线。不过，这里讨论的是等离子体中光束的微扰解，用微扰展开法求解的条件就是 β 很小。事实上，由激光打靶实验[6]可知：对等离子体细丝，其半径与长度之比，即 $a/L<0.01$。又由等离子体色散关系，在临界面附近，$\omega_p(0)\sim\omega$，故 $k\sim0$，所以，根据公式(7)便有 $\beta\ll0.01$。为了定性地讨论 $C(t)$ 和 $F(t)$ 的性质，我们近似地在方程(28)中略去右边第二项。这样，方程(28)和(30)的解可表示为

$$F(t)=\frac{1-p}{1+p}e^{-2i(t+t_0)} \tag{31}$$

$$C_0(t)=\varepsilon_0\frac{2p}{1+p}\times\exp\left[-t_0 i+\frac{t_0^2}{4}i(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1-p}{1+p}\right)((1+t_0)-(1-t)e^{-2i(t_0+t)})\right] \tag{32}$$

式中已利用了边界条件(24)和(25)。由(23)、(29)、(31)、(32)式，最后可以求出等离子体细丝中光束传播的解

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0\left(\frac{2p}{1+p}\right)\exp\left[\frac{t_0^2}{4}i(\alpha+\beta)-\frac{t^2}{4}i(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1-p}{1+p}\right)\times((1+t_0)-(1-t)e^{-2i(t_0+t)})\right]\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^m l_m(x)\exp\left[-\frac{x}{2}-(2m+1)(t_0+t)\right] \tag{33}$$

由 Lagureer 函数的生成函数[8]，可将(33)式化为

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0\left(\frac{2p}{1+p}\right)\exp\left[\frac{i}{4}(\alpha+\beta)(t_0^2-t^2)-\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1-p}{1+p}\right)((1+t_0)-(1-t)e^{-2i(t_0+t)})-i(t_0+t)-\frac{x}{2}-x\frac{1-f(t)}{f(t)}\right]\cdot\frac{1}{f(t)} \tag{34}$$

式中

$$f(t)=1-\frac{1-p}{1+p}\exp(-2i(t+t_0)),$$

(下转第 147 页)

作者感谢王治安、蓝光、薛松生等同志在使用计算机方面的支持和帮助。

参 考 文 献

1 P. G. Kryukov and V. S. Letokhov, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-8**, 766～782 (1972)

2 T. J. Kuznetsova, *Sov, Phys. JETP*, **30**, 904 (1972)

3 N. G. Basov *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-4**, 606 (1968)

4 B. Hausherr, E. Mathieu and H. Weber, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-9**, 445～449(1973)

5 朱振和，霍崇儒，物理学报，**30**, 198 (1981)

6 W. H. Glenn, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-11**, 8～17 (1975)

7 朱振和，物理学报，**34**, 426 (1985)

8 邱佩华，陈述春，中国激光，**34**, 143 (1983)

9 S. Singh, R. G. Smith and L. G. Van Vitert, *Phys. Rev.*, **B10**, 2566(1974)

10 Laser Program Annual Report-1979, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, Calif. UCRL-50021-79, p. 2～210

(上接第 150 页)

把(34)式中的各个因子整理后，有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x,\ t)
&= \varepsilon_0 \frac{p}{p\cos(t+t_0)+i\sin(t_0+t)} \\
&\quad \times \exp\left[\frac{x}{2}\,\frac{\cos(t+t_0)+ip\sin(t+t_0)}{p\cos(t+t_0)+i\sin(t+t_0)}\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{4}(\alpha+\beta)\,(t_0^2-t^2)\right. \\
&\quad -\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1-p}{1+p}\right) \\
&\quad \left.\times (1+t_0)-(1-t)\,e^{-2i(t_0+t)}\right] \qquad (35)
\end{aligned}
$$

四、讨 论

光束传播的解((35)式)呈现出随传播距离的增加而振荡的特点。与文献[7]的结果不同的是，我们的解的振荡频率由两部分组成：一是常数部分，这也是文献[7]所给出的部分；另一是随距离增大部分，它与$(\alpha+\beta)$的大小有关。由于α和β反比于等离子体特征长度L，所以，当$L\to\infty$时，$\alpha(\beta)\to 0$，即振荡频率为一常数，也就是(35)式过渡到了 McMullin 的解[7]。又由(35)式可见，即使在轴线上($x=0$)，光束的振荡频率也随t增大。

此外，虽然在求解(28)式时略去了第二项，但解(35)仍包含有振荡频率与β有关的特性。

有了光束传播的解后，就可以通过解 Maxwell 方程和流体力学方程讨论光束在等离子体细丝中传播时所引起的各种非线性效应，如谐波辐射和光的散射，这些都有待于进一步去研究。

作者感谢邓锡铭、余文炎研究员的指导。

参 考 文 献

1 P. Kaw *et al.*, *Phys. Fluids*, **16**, 1522 (1973)

2 V. K. Tripathi *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **48**, 3288 (1971)

3 E. L. Kane *et al.*, in "Laser Interaction and Related Plasma Phenomena", Vol. 4B, Plenum, New York, 1977

4 H. C. Barr *et al.*, *Phys.Rev. Lett.*, **56**, 2256 (1986)

5 Tan Weihan *et al.*, *Phys. Fluids*, **30**, 1510 (1987)

6 Lin Zunqi *et al.*, *Laser Part. Beams*, **4**, 223 (1986)

7 J. N. McMullin *et al.*, *Phys. Fluids*, **21**, 1828(1978)

8 王竹溪，郭敦仁，特殊函数概论(科学出版社，北京)，1979