中国激光
第16卷 第2期

部份相干 Talbot 效应及干涉仪*

刘 立 人
(中国科学院上海光机所)

Partially coherent Talbot effect and interferometry

Liu Liren
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanis, Academia Sinica, Shanghai)

提要：本文用模糊函数分析了部份相干照明下的光栅 Talbot 效应，表明光栅的自成像将发生加宽。同时还提出了部份相干 Talbot 干涉仪，这可采用空间非相干扩展光源。

关键词：Talbot 效应，干涉仪

单色空间相干光照明下的光栅自成像现象称作为 Talbot 效应。Talbot 效应已用衍射理论作过详细的分析[1,2]。根据 Talbot 自成像的原理可构成多种剪切干涉仪[3,4]。国内在这方面也做过许多工作[5~8]。

上述所有关于 Talbot 效应及干涉仪的分析和实验都是基于空间相干光照明的。虽然部份相干下的自成像条件也被理论上研究过[9]，但是至今还未直接研究过空间部份相干照明下的光栅 Talbot 自成像过程。本文研究部份相干照明下的 Talbot 效应。为了便于推导简单化，我们采取了模糊函数的方法[8,10]。分析表明，部份相干照明在光栅法线方向上使自成像剖面加宽，而在另一方向上只是单纯的部份相干光传播。基此本文提出了一种部份相干光栅 Talbot 干涉仪，用一定宽度的空间非相干光照明的狭缝作初始光源来产生部份相干照明。这种新方法减少了对光源的空间相干性要求，并可充分利用光能和提高观察亮度。

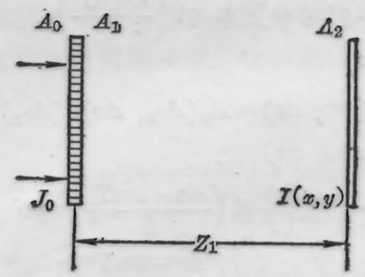

图 1 Talbot 效应装置

一、部份相干 Talbot 效应

观察 Talbot 效应的装置见图 1，用部份相干光照明光栅。光栅面上的空间部份相干照明采用准单色和空间准均匀近似[11]。因此部份相干照明的互强度能记作代表光强的中心坐标 s 的“慢”函数如代表相干度的坐标差

收稿日期：1987年10月15日。
*本工作由国家自然科学基金资助。

Δs 的"快"函数的乘积。一般采用高斯形函数，即

$$
J_0(s, \Delta s) = I_0 \exp\left(-\frac{2|s|^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{2|\Delta s|^2}{\xi_0^2}\right) \tag{1}
$$

a 为照明光强分布因子，ξ_0 与相干度关连。若系统通光口径为 r，则这里 $r \gg a \gg \xi_0$。

模糊函数定义为互强度对 s 的傅里叶积分，以空间频率差 Δv 和位置差 Δs 表征。两维情况下为

$$
A(\Delta v, \Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(s, \Delta s) \times \exp(-2\pi i \Delta v \cdot s) ds。\tag{2}
$$

因此部份相干照明的模糊函数为

$$
A_0 = I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2}{2}(\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2)\right) \times \exp\left(-\frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\xi_0^2}\right)。\tag{3}
$$

这里 Δv 和 Δs 在直角坐标系中的分量为 Δv_x，Δv_y 和 Δx，Δy. 开口为 h，周期为 T 的矩形光栅的模糊函数已由光栅函数

$$
g(x) = \sum_n \mathrm{Rect}\left(\frac{x - nT}{h}\right)
$$

求得为[8]

$$
A_g(\Delta v, \Delta s) = A_g(\Delta v_x, \Delta x)\delta(\Delta v_y) \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
A_g(\Delta v_x, \Delta x) &= \sum_n \sum_m \Big\{ \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right) \mathrm{sinc} \\
&\times \left(\Delta v_x h \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right)\right) \\
&+ (-1)^n \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right) \\
&\times \mathrm{sinc}\left(\Delta v_x h \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right)\right)\Big\} \\
&\times \delta\left(\Delta v_x - \frac{n}{T}\right)
\end{aligned} \tag{4'}
$$

部份相干照明透过光栅后的模糊函数为

$$
A_1(\Delta v, \Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\Delta v', \Delta s) A_g \times (\Delta v - \Delta v', \Delta s) d\Delta v'。\tag{5}
$$

距离 Z_T 的传播相当于传递矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda Z_T & 1 \end{bmatrix}$，则观察面上

$$
A_2(\Delta v, \Delta s) = A_1(\Delta v, \Delta s - \lambda Z_T \Delta v)。\tag{6}
$$

观察面上的光强分布则为

$$
I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\Delta v, 0)\exp(2\pi i \Delta v \cdot s) d\Delta v。\tag{7}
$$

(3)式和(4)式经由(6)式和(7)式计算，有

$$
\begin{aligned}
A_2(\Delta v, \Delta s) &= I_0 \frac{\pi a^2}{2} \exp\left(-\frac{2(\Delta x - \lambda Z_T \Delta v_x)^2}{\xi_0^2}\right) \\
&\times \exp\left(\frac{-2(\Delta y - \lambda Z_T \Delta v_y)^2}{\xi_0^2}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 \Delta v_y^2}{2}\right) \cdot \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 (\Delta v_x - \Delta v_x')}{2}\right)^2 \\
&\times A_g(\Delta v_x', \Delta x - \lambda Z_T \Delta v_x) d\Delta v_x'。
\end{aligned} \tag{8}
$$

当传播距离满足 Talbot 条件

$$
Z_T = \frac{\alpha}{\beta}\frac{T^2}{\lambda} \tag{9}
$$

时，由(7)式经乘积和卷积的傅里叶变换和文献 8 的结果，观察屏上的光强分布为

$$
\begin{aligned}
I(x, y) &= I_0 \frac{\pi a^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\left(\frac{\lambda Z_T}{\xi_0}\right)^2 + \frac{\pi^2 a^2}{2}}} \\
&\times \exp\left(-\frac{\pi^2 y^2}{2\left(\frac{\lambda Z_T}{\xi_0}\right)^2 + \frac{\pi^2 a^2}{2}}\right) \\
&\times \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_0}{\lambda Z_T} \\
&\times \Big\{ \exp\left(-\left(\frac{\pi \xi_0}{\lambda Z_T}\right)^2 \frac{x^2}{2}\right) \\
&\otimes \frac{1}{\beta} \sum_n \mathrm{Rect}\left(\frac{x - \frac{nT}{\beta} - \frac{\alpha T}{2}}{h}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right)\Big\}。
\end{aligned} \tag{10}
$$

这里⊗代表一维卷积积分。

平面波相干照明下的观察屏上的光强分布为[8]

$$
I(x, y) = \frac{1}{\beta} \sum_n \mathrm{Rect}\left(\frac{x - \frac{nT}{\beta} - \frac{\alpha T}{2}}{h}\right)。
$$

当 $\frac{\alpha}{\beta}$ 为正整数时，光栅精确成像，也称作 Fourier 像。$\frac{\alpha}{\beta}$ 为正有理数时，自成像的周期缩小 β 倍，光栅非精确成像，也称作 Fresnel 像。α 为奇数时，自成像还平移半个 T 周期。

由此可见，部份相干照明使光栅的自成像加宽，加宽卷积项的指数因子相当于 $2\lambda Z_T/\pi\xi_0$。照明相干度较高(即 ξ_0 较大)和传播距离 Z_T 较小时，加宽效应较小。同时还见，光栅法线 x 方向上的自成像光强包络分布仍与原照明光强分布一样。而 y 轴向上的光强分布宽度将发生变化，但与部份相干光单纯传播一自由空间距离后的光强分布相同[12]。这三个特点充分显示了部份相干照明所起的作用，揭示了 Talbot 效应与相干度之间的内在联系。

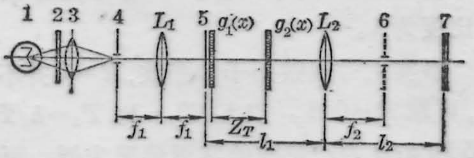

图 2　部份相干 Talbot 干涉仪

二　部份相干 Talbot 干涉仪

由于部份相干照明主要导致自成像光栅的加宽，只要控制加宽的程度即可构成部份相干照明的 Talbot 干涉仪。图 2 显示了一种典型结构。

其中白炽灯 1 通过过滤色片 2 聚焦于孔径光阑 4 上。根据 Van Cittert-Zernike 原理，孔径光阑通过变换透镜 L_1 将在后焦面上产生准单色空间部份相干照明。由于光栅本身只是一维函数，因此考虑整个系统用一维分布的孔径光阑来产生一维分布的部份相干照明。

设孔径光阑函数为 $f(x)$，则互强度为

$$J'_0(x,\ \Delta x)=I_0 f(x)\delta(\Delta x)\text{。}$$

令 $F(\Delta v_x)$ 为 $f(x)$ 的傅氏变换，则其模糊函数为

$$A'_0(\Delta v_x,\ \Delta x)=I_0 F(\Delta v_x)\delta(\Delta x)$$

透镜 L_1 的傅里叶变换传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda f} \\ -\lambda f & 0 \end{bmatrix},$$

则在后焦面，即第一光栅面上产生空间准均匀部份相干照明

$$A_0(\Delta v_x,\ \Delta x)=I_0 F\left(\frac{\Delta x}{\lambda f}\right)\delta(\lambda f \Delta v_x)\text{.}$$

为制作上方便，令孔径光阑为矩形狭缝:

$$f(x)=\mathrm{Rect}\left(\frac{x}{h}\right) \tag{11}$$

此种部份相干光照明第一光栅 $g_1(x)$ 可用上节同样方法求得 Talbot 距离上的光栅自成像，即

$$I(x,\ y)=I_0\frac{1}{\lambda^2 f_1 Z_T}\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{x f_1}{h_0 Z_T}\right)\right.$$

$$\otimes\frac{1}{\beta}\sum_n \mathrm{Rect}$$

$$\left.\times\left(\frac{x-\frac{nT_1}{\beta}-\frac{\alpha T_1}{2}}{h_1}\right)\right\}\text{。} \tag{12}$$

这时产生矩形卷积加宽效应。

被测相位体可放置于第一光栅前。假定其相位变化缓慢，并近似有 $\exp(i\phi(\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}))=\exp\left\{i\left[\phi(\boldsymbol{s})+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{s})}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{s})}{\partial y}\Delta y\right]\right\}$。则被测相位体的模糊函数为

$$A_{obj}(\Delta\boldsymbol{v},\ \Delta\boldsymbol{s})=\int_{-\infty}^{\infty}\exp$$

$$\times\left[i\phi\left(\boldsymbol{s}+\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{2}\right)\right]\exp\left[-i\phi\left(\boldsymbol{s}-\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{2}\right)\right]$$

$$\times\exp(-2\pi i\Delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}\text{。}$$

即

$$A_{obj}(\Delta v_x,\ \Delta x)=\exp\left(i\frac{\partial\phi(x,\ y)}{\partial x}\Delta x\right)\delta(\Delta v_x) \tag{13}$$

同样能求得在 Z_T 距离上由于相位物体引入后所产生的光栅自成像:

$$I'(x, y)=I_0\frac{1}{\lambda^2 f_1 Z_T}\Big[\mathrm{Rect}\Big(\frac{xf_1}{h_0 Z_T}\Big)$$
$$\otimes\frac{1}{\beta}\sum_n \mathrm{Rect}$$
$$\times\Big(\frac{x-\frac{nT_1}{\beta}-\frac{\alpha T_1}{2}-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}Z_T}{h_1}\Big)\Big] \tag{14}$$

表明相位变化使自成像加宽光栅局部平移了 $\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}Z_T$。

与一般 Talbot 干涉仪一样，被调制的相位梯度信息可再加第二光栅 $g_2(x)$ 进行解调。但与一般 Talbot 干涉仪不同的是必须再使用成像透镜 L_2，以消除照明光在 y 轴向投影产生的发散。物体正确成像在观察屏上，放大倍数为 $M=-l_2/l_1$。直接放置第二光栅时将属莫尔差频解调，而在成像透镜后焦面上再采用空间滤波器 6 时为滤波解调。这两种方法已多有论述。现以莫尔解调为例，通过第二光栅的光强为

$$I_{ob}(x, y)=\frac{I_0}{\lambda^2 f_1 Z_T}\Big[\mathrm{Rect}\Big(\frac{xf_1}{h_0 Z_T}\Big)$$
$$\otimes\frac{1}{\beta}\sum_n \mathrm{Rect}$$
$$\times\Big(\frac{x-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}Z_T-\frac{nT_1}{\beta}-\frac{\alpha T_1}{2}}{h_1}\Big)\Big]$$
$$\times\sum_n \mathrm{Rect}\Big(\frac{x-nT_2}{h_2}\Big)。 \tag{15}$$

应当使 $T_2=T_1/\beta=T$，莫尔差频项近似表达为

$$\bar{I}_{ob}(x, y)\propto\cos^2\Big[\frac{\pi}{T}\Big(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}Z_T\Big)-\pi\alpha\Big]。 \tag{16}$$

条纹与相位梯度有关，即是横向剪向干涉条纹，剪切量由 Z_T/T 决定。物体也可放置于两个光栅之间。设物体到第二光栅的距离为 Z，则上两式中相位梯度有关乘数 Z_T 可用 Z 代替。剪切量借助移动物体而连续变化。事实上，观察屏上的像仅是 I_{ob} 放大 M 倍而已。

三、干涉条纹的对比度分析

干涉条纹的对比度，$R=I_{max}-I_{min}/I_{max}+I_{min}$，与光栅自成像的加宽效应密切有关。事实上莫尔低频条纹的剖面函数是两光栅剖面的相关积分[13]，偶实函数情况下就是卷积积分。由卷积操作的次序可交换性质可知，部份相干自成像加宽效应最终可表达为对光栅莫尔低频项剖面函数的卷积加宽。

为得到 $R=1$ 的高对比条纹，首先应使两光栅的莫尔条纹具有零值，即要求$(h_1+h_2)\leqslant T$。加宽函数的宽度为

$$h_0'=\frac{h_0 Z_T}{f_1}, \tag{17}$$

则使部份相干莫尔低频条纹还要具有零值，又须使 $h_0'\leqslant T-(h_1+h_2)$。具有零值的条纹对比度为 1。

事实上为观察到干涉条纹，$R=1$ 并不必要，可取 $R=0.5$。以 $h_1/T_1=h_2/T_2=h/T=0.5$ 和 α/β 为正整数的常用情况为例，可求得条纹对比度为

$$R=1-\frac{h_0'}{T}。 \tag{18}$$

这里 $h_0'<T$，而当 $h_0'>T$ 时 $R\approx0$。

这样便能用非相干扩展光源产生足够对比度的干涉条纹，而不必采用空间相干光或激光。适当控制满足一定对比度所需的 h_0' 值下的 h_0, f_1 和 Z_T 参数，使聚光镜对光源的成像与狭缝宽度 h_0 接近，便能充分利用照明光源的能量，产生很高的观察亮度。

四 实 验

实验系统如图 2。光源为卤素灯，红色滤光片产生平均波长 ~600.0nm 的近似单色光，$f_1=180$ mm, $f_2=135$ mm。两光栅的周期均为 0.2mm，开口 0.1mm。Talbot 条件取 $\frac{\alpha}{\beta}=4$。狭缝宽度可调。

首先观察光栅自成像的加宽，狭缝为 0.1 mm，相当于 $h_0'=0.15$ mm。在第二光栅位置上放置观察屏，产生的加宽自成像见图 3(a)，为梯形剖面。最小光强的底部宽度为周期的 1/4，与计算一致。若在观察屏前再加稍些倾斜的第二光栅，则产生 $R=0.25$ 的低对比度条纹，见图 3(b)。为作比较，狭缝宽为 0.03 mm，$h_0'\approx0.045$ 下的较高对比度 $R=0.775$ 的条纹见于图 3(c)。

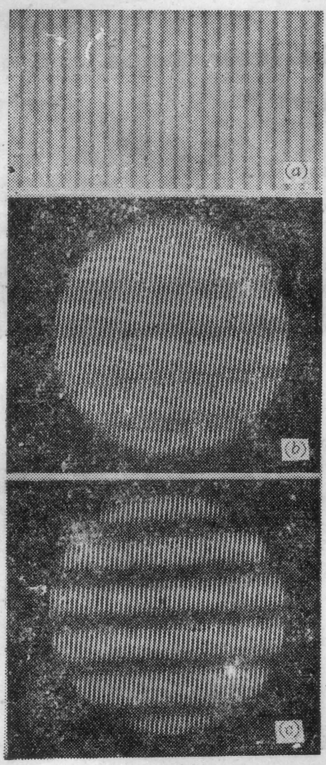

图 3

(a) 部分相干加宽光栅自成像
(b) 低对比度莫尔条纹；
(c) 高对比度莫尔条纹

作为干涉仪实验，在第一光栅前放置酒精灯火焰作被测相位体。图 4(a) 和图 4(b) 分别显示了 $h_0=0.1$ mm 和 $h_0=0.03$ mm 下的火焰横向剪切干涉图。前者为低对比度莫尔条纹，后者为较高对比度莫尔条纹。

利用空间滤波也可取得相似的火焰干涉

图 4

(a) 低对比度火焰干涉图；(b) 高对比度火焰干涉图

图，但消除了光栅载频条纹。

参 考 文 献

1 J. T. Winthrop, C. R. Worthington, *JOSA*, **55** (4), 373～381 (1965)
2 W. D. Montgomery, *JOSA*, **57**(6), 772～778 (1967)
3 D. E. Silva, *Appl. Opt.*, **11**(11), 2613～2624 (1972)
4 H. J. Rabal, W. D. Furlan, E. E. Sicre, *Opt. Commun.*, **57** (2), 81～83 (1986)
5 罗懿祖，王伟建，中国激光，**10**(4), 225～229 (1983)
6 白贵儒 *et al.*，光学学报，**4**(6), 535-540 (1984)
7 廖红江，顾长吾，光学学报，**5**(4), 331～335 (1985)
8 刘立人，光学学报，**7**(6), 501～509 (1987)
9 A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castaneda, E. Streibl, *Opt. Acta*, **30** (9), 1259～1266(1983)
10 A. Papoulis, *JOSA*, **67** (6), 785～796 (1977)
11 W. H. Carter, E. Wolf, *JOSA*, **64** (6), 779～788 (1974)
12 A. S. Carter, "Elements of Optical Coherence Theory" (John Wiley and Sons, New York, 1982), 145～149
13 J. M. Burch, Progress in Optics (ed. E. Wolf, North Holland, Amsterdam), **2**, 75～108