中国激光
第15卷 第9期

弱高斯光阑近似和相位共轭腔的基本性质

吕百达 蔡邦维 王绍民
(四川大学物理系) (杭州大学物理系)

提要：对弱高斯光阑近似的物理意义和相位共轭腔(PCR)的基本性质作了详细讨论，使用传播矩阵方法推导出了PCR补偿腔内畸变的条件。PCR具有本质上不同于常规腔的特点。

Weak-Gaussian aperture approximation and fundamental characteristics of phase conjugate resonators (PCRs)

Lü Baida, Cai Bangwei
(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu)

Wang Shaomin
(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou)

Abstract: Physical meaning of weak-Gaussian aperture approximation and the fundamental characteristics of PCRs are discussed in detail. The conditions for compensating intracavity distortions of PCRs is derived by using the transfer matrix method. Properties of PCRs are essentially different from those of conventional resonators.

相位共轭腔(PCR)因具有能补偿腔内波前畸变、对失调不灵敏等一系列优点而受到重视，自七十年代末起，对此已进行了不少研究，从理论上弄清了PCR的一些基本特征，并做了若干实验验证[1~4]。已证明当腔内仅存在实元件时，简并情况下PCR中的横模结构是不确定的。为了确定PCR的模，应当引入具有振幅横向分布的虚元件，例如高斯光阑(GA)。在弱高斯光阑近似下，PCR中可存在确定的高斯基模。引入G_1、G_2参数后，便可用常规光腔的复参数$ABCD$定律和自洽条件进行分析[1,4]。但是，我们认为对弱高斯光阑近似物理意义的理解，采用某些方法和由此得出关于PCR性质的某些结论尚值得认真讨论。本文对此作一些具体分析。

一、弱高斯光阑近似下PCR的基模

1.1 高斯光阑置于相位共轭镜(PCM)处

无论由简并四波混频或受激布里渊背散射等非线性光学方法形成的PCM，都可以认为本身具有一种横向振幅为高斯分布的限模结构，因此认为GA置于PCM处是合乎实际物理情况的。图1所示的相位共轭腔，由曲

收稿日期：1987年4月20日。

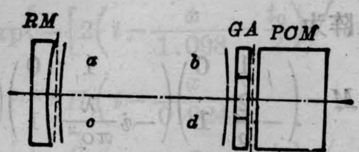

图1 相位共轭腔，GA 置于 PCM 处

率半径为 ρ 的真镜（RM）和带 GA 的 PCM 相距 L 构成。腔内可置多种光学元件，用传播矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 表示。GA 的传播矩阵为[1]

$$M_{GA}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

式中 λ 为激光波长；σ 为高斯光阑的宽度。

PCM 采用传播矩阵第 I 形式[4]

$$M_{PCMI}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

以 RM 为参考，腔内往返一周的传播矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

设 RM 处基模高斯光束复参数 q_{RM} 为

$$\frac{1}{q_{RM}}=\frac{1}{R_{RM}}-i\frac{\lambda}{\pi W_{RM}^2} \tag{1-4}$$

式中 W_{RM}——RM 处高斯光束光斑半径；

R_{RM}——RM 处高斯光束等相面曲率半径。

由往返一周自洽条件

$$q_{RM}=\frac{Aq_{RM}^*+B}{Cq_{RM}^*+D} \tag{1-5}$$

求得

$$W_{RM}^2=\frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{1+\xi^2}{\dfrac{1}{\rho^2}+\zeta}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-6}$$

$$R_{RM}=\frac{1}{-\dfrac{1}{\rho}\pm\sqrt{\dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}\left(\dfrac{1}{\rho^2}+\zeta\right)}} \tag{1-7}$$

式中

$$\xi=-\frac{2b\lambda G_1}{\pi\sigma^2} \tag{1-8}$$

$$\zeta=\frac{a}{b^2}(2G_1-a) \tag{1-9}$$

$$G_1=a-\frac{b}{\rho} \tag{1-10}$$

若采用弱 GA 近似，即 $\sigma\to\infty$，有

$$W_{RM}^2=\frac{\lambda}{\pi}\left|\frac{b}{G_1}\right| \tag{1-11}$$

$$R_{RM}=-\rho \tag{1-12}$$

对空腔

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

则

$$W_{RM}^2=\frac{\lambda L}{\pi|G_1|} \tag{1-14}$$

以 PCM 为参考，腔内往返一周矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

在 PCM 处的光束参数 q_{PCM} 为：

$$\frac{1}{q_{PCM}}=\frac{1}{R_{PCM}}-i\frac{\lambda}{\pi W_{PCM}^2} \tag{1-16}$$

利用往返一周自洽条件，仿上计算得到

$$W_{PCM}^2=\frac{2\lambda|bG_1|}{\pi\left[1+\left(\dfrac{2\lambda bG_1}{\pi\sigma^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{1-17}$$

和

$$R_{PCM}=\frac{2bG_1}{2dG_1-1} \tag{1-18}$$

当 $\sigma\to\infty$ 时，

$$W_{PCM}^2=\frac{2\lambda|bG_1|}{\pi} \tag{1-19}$$

显然，PCM 处的光束参数也可直接利用 RM 处的结果，由 $ABCD$ 定律求出。

对于空腔，将(1-13)式代入(1-18)、(1-19)式得

$$R_{PCM}=\frac{2LG_1}{2G_1-1} \tag{1-20}$$

$$W^2_{PCM}=\frac{2\lambda L|G_1|}{\pi} \tag{1-21}$$

容易证明，上面的结果亦可利用 PCM 的第二矩阵形式[3]

$$M_{PCMII}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{R_{PCM}} & 1\end{pmatrix} \tag{1-22}$$

推导出来。

1.2 高斯光阑置于 PCR 中

文献[1]讨论了这一情况。物理上，这要求将专门制备的高斯光阑置于腔中。在弱 GA 近似下，得到了计算 W_{RM}、R_{RM}、W_{PCM}、R_{PCM} 的公式。我们认为使用方法和所得某些结论的严格性是值得认真讨论的。如[1]认为，因为位于 GA 之右的传播矩阵

$$\begin{pmatrix}a_p & b_p\\ c_p & d_p\end{pmatrix}$$

诸元不出现在模参数公式中，所以 PCR 能完全补偿位于 PCM 附近的畸变。这一推理不很严格。例如，对空腔

$$\begin{pmatrix}a_m & b_m\\ c_m & d_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & l_m\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1-23}$$

$$\begin{pmatrix}a_p & b_p\\ c_p & d_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & l_p\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1-24}$$

和

$$l_m+l_p=L \tag{1-25}$$

按[1]的方法，会得出

$$W^2_{RM}=\frac{\lambda l_m}{\pi|G_1|} \tag{1-26}$$

和

$$G_1=1-l_m/\rho \tag{1-27}$$

的结果，而不是[1]中的(10)式。不仅如此，我们再分析一下 GA 置于 RM 处的极端情况会更清楚。

1.3 高斯光阑置于 *RM* 处

这种情况下以 RM 为参考，腔内往返一周矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{\rho} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i\frac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & b\\ c & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ i\frac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1\end{pmatrix} \tag{1-28}$$

注意到 PCM 的特性：

$$\begin{pmatrix}d & b\\ c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1-29}$$

得到

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{\rho}-i\frac{2\lambda}{\pi\sigma^2} & -1\end{pmatrix} \tag{1-30}$$

在弱 GA 近似下（参考面 RP 取在 GA 之前或 GA 之后不影响最后结果），由往返一周自洽条件得到

$$R_{RM}=-\rho \tag{1-31}$$

而 W_{RM} 可取任意值，并且与 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 矩阵诸元无关。是否这就表示 PCR 能完全补偿腔内任意处的畸变呢？这都应当考虑其它因素并有待于进一步实验鉴别。

二、腔内光学元件对 PCR 光束输出特性的影响

设 RM 是"匹配"的，这时输出光束远场发散角 θ_0 由 W_{RM} 决定

$$\theta_0=\frac{\lambda}{\pi W_{RM}} \tag{2-1}$$

近场特性由 W_{RM}、R_{RM} 决定。由(1-11)、(1-12)式知，对 W_{RM} 有影响的只是腔内传播矩阵元 a、b，而 R_{RM} 始终等于 RM 曲率半径 ρ。因此得到结论：当腔内有畸变存在，但畸变只引起 c、d 变化，而不影响 a、b 时，PCR 对畸变有补偿能力。

将一焦距为 f 的薄透镜置于靠近 PCM

处，这时

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -1/f & 1-L/f \end{pmatrix} \quad (2\text{-}2)$$

若 GA 位于 PCM 处，在弱 GA 近似下，仿上计算得到

$$W_{RM}^2 = \frac{\lambda L}{\pi |G_1|} \quad (2\text{-}3)$$

$$R_{RM} = -\rho \quad (2\text{-}4)$$

$$W_{PCM}^2 = \frac{2\lambda L |G_1|}{\pi} \quad (2\text{-}5)$$

$$R_{PCM} = 2LG_1 \Big/ \left[2G_1 \left(1 - \frac{L}{f}\right) - 1 \right] \quad (2\text{-}6)$$

$$G_1 = 1 - L/\rho \quad (2\text{-}7)$$

由此可知，W_{RM}、R_{RM} 都与 f 无关，因而当激光由 RM 端输出时，具有补偿畸变能力。虽然 W_{PCM} 与 f 无关，但 R_{PCM} 却随 f 而变化，因此，从 PCM 端将得到波前畸变的光束。为利用 PCR 对腔内畸变补偿特性，激光束应由 RM 端输出。

定义 $$G_2 = d - b/R_{PCM} \quad (2\text{-}8)$$

便有[1] $$G_1 G_2 = 1/2 \quad (2\text{-}9)$$

因(2-9)式对所讨论的 PCR 始终成立（非简并情况除外），故[1]认为 PCR 是无条件稳定的。为了进一步讨论这一问题，我们设想将薄透镜置于 $l_1 = 2l_2 = 2l$（见图 2)处，且有 $l_1 + l_2 = L$，并取 $\rho = 6l$ 则

$$W_{RM}^2 = \frac{6\lambda l}{\pi} \left| \frac{3-2l/f}{3-4l/f} \right| \quad (2\text{-}10)$$

$$W_{PCM}^2 = \frac{\lambda l}{3\pi} \left| (3-2l/f)(3-4l/f) \right| \quad (2\text{-}11)$$

归一化的 $\frac{\pi W_{RM}^2}{6\lambda l}$ 和 $\frac{\pi W_{PCM}^3}{6\lambda l}$ 随 l/f 变化示意于图 3 之中。

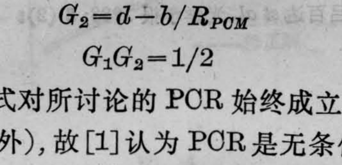

图 2 腔内含有一个薄透镜的 PCR

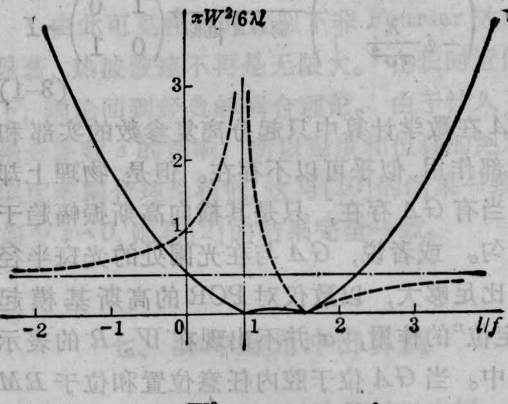

图 3 归一化 $\frac{\pi W_{RM}^2}{6\lambda l}$（虚线）、$\frac{\pi W_{PCM}^2}{6\lambda l}$（实线）随 l/f 的变化

由图 3 可得出如下结论：

(1) 在高斯光束意义下，当 $l/f = 0.75$ 时，按(2-10)、(2-11)式，形式上会得出 $W_{RM} \to \infty$，$W_{PCM} = 0$，因此，$G_1 = 0$，$G_2 \to \infty$。同理，当 $l/f = 1.5$ 时，$W_{RM} = 0$，$W_{PCR} = 0$，$G_1 = -1/2$，$G_2 = -1$，即因 PCM 的曲率半径 $\rho_{PCM} = R_{PCM}$ 不是常数，具有“自适应”变化特性，尽管光斑大小 W_{RM}、W_{PCM} 可出现奇异现象（计算值 $W \to 0, \infty$ 实际上不可能，因为在这些奇异点，高斯光束公式已不能使用）。但(2-9)式却始终成立。这说明，对 PCR 用常规光腔的术语来区分“稳定”与“非稳”腔则因注意，即使在常规光腔“稳定”的意义下，也可能有奇异点出现。显然，这一结论对空腔也是正确的。

(2) 由图 3 还可看出，对 PCR，W_{RM}、θ_0 可在较大范围内变化，即输出光束的质量指标可在较大范围改变。因此，对 PCR 仍存在光腔的最佳设计问题。在这种意义下，使用“PCR 是自动最佳化”的说法，容易引起混淆。

三、小　结

1. 在弱 GA 近似下，可确定 PCR 的基模。弱 GA 近似的数学意义是 $\sigma \to \infty$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\dfrac{\lambda}{\pi\sigma^2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{弱 } GA \text{ 近似}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{3-1}$$

GA 在数学计算中只起分离复参数的实部和虚部作用，似乎可以不存在。但是，物理上却应当有 GA 存在，只是其横向高斯振幅趋于均匀。或者说，GA 与在光阑处的光斑半径相比足够大，以致仅对 PCR 的高斯基模起“定位”的作用，σ 并不出现在 W、R 的表示式中。当 GA 位于腔内任意位置和位于 RM 处时 PCR 的基模，以及在具体问题中，σ 应取值多少，才能满足弱 GA 条件，都应由更深入的实验研究并结合理论分析来确定。

2．PCR 除了与常规腔有相似之处外，还有本质上不同于常规腔的特点。例如，在简并情况下，PCR 的 G 参数始终满足(2-9)式，这是由于 PCM 的曲率半径 ρ_{PCM} 等于入射高斯光束等相面的曲率半径 R_{PCM} 的自适性特性引起的。对于(2-9)式至少不能按照常规光腔的方式理解为 PCR 是无条件稳定的，自动最佳化的。同样，认为常规腔当 G 参数满足(2-9)式时就是热稳定的结论，也不能移用于腔内有热扰存在的 PCR[5]。PCR 模的微扰稳定性问题也应当针对腔内仅有实元件或者还有虚元件存在的不同情况具体进行计算。

3．物理上的 PCR，因光腔或多或少有横向的非均匀性或限制存在而使光束具有某一或某些确定的横向场分布，现有理论尚不能对此作出满意的解释。特别是因(1-29)式成立而进一步作出的一些推论，更应当由实验来鉴定。

参 考 文 献

1 Belanger P A. *Opt. Engineering*, 1982; **21** (2): 266

2 Feinberg J, Hellwarth R W. *Opt. Lett.*, 1980; **41**(12): 519

3 Wang Shaomin, Weber H. *Opt. Commun.*, 1982; **5** (5): 360

4 Auyeung J *et al. IEEE J. Quant. Electr.*, 1979; **QE-15**(10): 1180

5 吕百达 *et al.* 光学学报 1988; **8** (2):