中国激光
第15卷 第9期

激光冲击作用下材料的非 Fourier 热弹性响应

袁 钢 周光泉
(中国科技大学近代力学系)

提要：从修正的 Fourier 热传导定律出发，讨论了激光在一维半无限介质中产生热击波的传播规律。在短时和长时近似下，得到了解析表达式。短时近似解反映非 Fourier 行为，长时解则退化为经典 Fourier 热传导定律下的热力耦合波解。

Non-Fourier thermoelastic response to laser impact on a target

Yuan Gang, Zhou Guangquan
(Department of Morden Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract: Starting from modified Fourier heat conduction law, the propagation law of thermal shock-wave produced by laser light on one dimensional semi-infinite medium is discussed. Analytical expressions are obtained on short time and long time approximations. The short time approximate solution represents non-Fourier behaviour and the long time approximate solution degrades into thermal coupled wave solution in classial heat conduction law.

一、引 言

在功率密度不是太高($<10^7\,\mathrm{w/cm^2}$)时，脉冲激光(脉宽 10～100 ns)将在固体材料中产生热弹性应力波。这对不透明的材料及非接触的无损检测、各种极端条件下物理参数的测量，有着广泛的应用前景。

已有人利用经典的 Fourier 热传导定律，在非热力耦合情况下，建立了激光引起的热弹性波理论[1,2,5]，但这种理论没有考虑热力耦合以及在激光这种特殊载荷作用下材料可能发生的非 Fourier 响应。另一方面，考虑了稳态下热应力的分布以及可能造成的材料损伤，但没有考虑波动过程。

本文试图从修正的 Fourier 热传导定律出发讨论激光冲击作用下固体中热击波的传播规律。并和经典 Fourier 热冲击问题进行比较。

二、问题的表述

为了讨论的方便，我们作如下假设：

1．光斑是均匀无限大的，而只讨论半空间的一维问题；

2．激光的功率密度 $I<10^7\,\mathrm{w/cm^2}$，在材料中产生热弹性波。并假设固体表面不发

收稿日期：1987年4月20日。

生相变；

3．材料的热学、力学常数在所考虑的温度变化范围内变化很小，近似认为常数。

在高功率密度和短脉冲的情况下，脉冲时间已能和热松弛时间相比，这时必须对 Fourier 热传导定律进行修正[5]。这种修正可以避免出现无限大的热波波速。

在我们考虑的一维情况下，控制方程为：

$$K\bar{T}''=\rho C_V(\dot{\bar{T}}+\tau_0\ddot{\bar{T}})+(3\lambda+2\mu)\alpha\bar{T}_0(\dot{\bar{u}}'+\tau_0\ddot{\bar{u}}') \tag{1}$$

$$\rho\ddot{\bar{u}}=(\lambda+2\mu)\bar{u}''-(3\lambda+2\mu)\alpha\bar{T}' \tag{2}$$

$$\bar{\sigma}=(\lambda+2\mu)\bar{u}'-(3\lambda+2\mu)\alpha(\bar{T}-\bar{T}_0) \tag{3}$$

式中 $\bar{\sigma}$、$\bar{u}$分别为应力和位移；$\bar{T}$、$\bar{T}_0$ 为温度和环境温度；ρ、C_V、α、K 分别为材料的密度、比热、线膨胀系数和热导系数；λ、μ 为弹性常数；τ_0 为热松弛时间。

我们采用表面吸热模型，假设能量在表面被吸收。这样边界条件可表述为：

$$\bar{q}(\bar{x},\bar{t})_{\bar{x}=0}=-K\left.\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0}-\tau_0\left.\dot{\bar{q}}(\bar{x},\bar{t})\right|_{\bar{x}=0}=(1-R)I_m f(\bar{t}) \tag{4}$$

式中 $\bar{q}$ 为单位面积输入能量，$\bar{x}$、$\bar{t}$ 分别为位置坐标和时间，R 为表面光反射系数，I_m 为激光功率密度峰值，$f(\bar{t})$ 为脉冲时间形状函数。

由于表面是自由的，力学边界条件为：

$$\bar{\sigma}(0,\bar{t})=0 \tag{5}$$

初值条件表述为：

$$\bar{T}(\bar{x},0)=\bar{\sigma}(\bar{x},0)=\dot{\bar{T}}(\bar{x},0)=\dot{\bar{\sigma}}(\bar{x},0)=\bar{u}(\bar{x},0)=\dot{\bar{u}}(\bar{x},0)=0 \tag{6}$$

引入无量纲数：

$$\left.\begin{aligned}&x=\bar{x}/x_r,\ t=\bar{t}/t_r,\ T=\frac{\bar{T}-\bar{T}_0}{\bar{T}_0}\\&\sigma=\bar{\sigma}/\sigma_r,\ u=\bar{u}/u_r\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&x_r=\frac{K}{\rho C_V}\Big/\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2},\\&t_r=\frac{K}{\rho C_V}\Big/\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\\&\sigma_r=(3\lambda+2\mu)\alpha\bar{T}_0,\\&u_r=\frac{K}{\rho C_V}\Big/\left[\rho\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{3/2}\times\frac{1}{(3\lambda+2\mu)\alpha\bar{T}_0}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

代入(1～3)式中：

$$T''-\dot{T}-\beta\ddot{T}=e(\dot{u}'+\beta\ddot{u}') \tag{9}$$

$$u''-\ddot{u}=T' \tag{10}$$

$$\sigma=u'-T \tag{11}$$

式中

$e=\dfrac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha^2\bar{T}_0}{(\lambda+2\mu)\rho C_V}$ 表示热力耦合系数

$\beta=\left(\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\left(\dfrac{\rho C_V}{K}\right)\tau_0$ 表示无量纲松弛时间。

三、变换域中的解

对(9～11)作 Laplace 变换并利用(6)

$$\tilde{T}''-a_1\tilde{T}=ea_1\tilde{u}' \tag{12}$$

$$\tilde{u}''-p^2\tilde{u}=\tilde{T}' \tag{13}$$

$$\tilde{\sigma}=\tilde{u}'-\tilde{T} \tag{14}$$

式中　$a_1=p+\beta p^2$

利用(7～8)，对(4)作 Laplace变换，并解出 $\tilde{T}'(0,p)$

$$\tilde{T}'(0,p)=-AF(p)(1+\beta p) \tag{15}$$

式中

$$A=\frac{x_r(1-R)}{K\bar{T}_0}I_m,\ F(p)=L[f(t)]$$

应力边界条件为：

$$\tilde{\sigma}(0,p)=0 \tag{16}$$

对(12)、(14) 的空间变量作 Fourier 正弦变换，对(13)作 Fourier 余弦变换，解得

$$\tilde{T}^s=\frac{\lambda Z(\lambda^2+p^2)}{(\lambda^2+\alpha_1^2)(\lambda^2+\alpha_2^2)} \tag{17}$$

$$\tilde{\sigma}^s=-\frac{p^2\lambda Z}{(\lambda^2+\alpha_1^2)(\lambda^2+\alpha_2^2)} \tag{18}$$

$$\tilde{u}^s=\frac{\begin{Bmatrix}\lambda[Z(\lambda^2+a_1-ea_1)\\+AF(p)(1+\beta p)]\end{Bmatrix}}{(\lambda^2+\alpha_1^2)(\lambda^2+\alpha_2^2)} \quad (19)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1^2+\alpha_2^2&=a_2+p^2,\\ \alpha_1^2-\alpha_2^2&=\sqrt{(a_2+p^2)^2-4a_1p^2}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$a_2=a_1+ea_1,\ Z=\tilde{T}(0,\ p) \quad (21)$$

利用留数定理解得:

$$\tilde{T}=\frac{Z}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}\{(p^2-\alpha_2^2)e^{-\alpha_2x}-(p^2-\alpha_1^2)e^{-\alpha_1x}\} \quad (22)$$

$$\tilde{\sigma}=-\frac{Zp^2}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}(e^{-\alpha_2x}-e^{-\alpha_1x}) \quad (23)$$

$$\tilde{u}=\frac{Z}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}(\alpha_2e^{-\alpha_2x}-\alpha_1e^{-\alpha_1x}) \quad (24)$$

式中

$$Z=AF(p)(1+\beta p)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)/\{\alpha_2(p^2-\alpha_2^2)-\alpha_1(p^2-\alpha_1^2)\} \quad (25)$$

这样我们得到了变换域中的精确解(22)～(24)。

四、短 时 解

根据文献[6]对双曲型方程的 Tauberian 定理，当 $p\to\infty$ 时(22)～(24)式给出波前跳跃及波到时的近似解。在 $p\to\infty$ 时由(20)式有如下关系:

$$\alpha_{1,2}=p/v_{1,2}+k_{1,2}+0\left(\frac{1}{p}\right)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&2/v_{1,2}=(1+\beta+e\beta)\pm Q^{1/2}\\ &4k_{1,2}=v_{1,2}[1+e\pm Q^{-1/2}\{\beta(1+e)^2\\ &\qquad +e-1\}]\\ &Q=(1-\beta+e\beta)^2+4e\beta^2\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

将(26)代入(21～24)式并做 Laplace 逆变换:

$$T(x,\ t)=\overline{A}\left\{\left(1-\frac{1}{v_2^2}\right)e^{-k_2x}H\left(t-\frac{x}{v_2}\right)\times f\left(t-\frac{x}{v_2}\right)-\left(1-\frac{1}{v_1^2}\right)e^{-k_1x}\times H\left(t-\frac{x}{v_1}\right)f\left(t-\frac{x}{v_1}\right)\right\} \quad (27)$$

$$\sigma(x,\ t)=-\overline{A}\left\{e^{-k_2x}H\left(t-\frac{x}{v_2}\right)f\left(t-\frac{x}{v_2}\right)-e^{-k_1x}H\left(t-\frac{x}{v_1}\right)f\left(t-\frac{x}{v_1}\right)\right\} \quad (28)$$

$$u(x,\ t)=\overline{A}\left\{\frac{1}{v_2}e^{-k_2x}\int_0^t H\left(\tau-\frac{x}{v_2}\right)\times f(t-\tau)d\tau-\frac{1}{v_1}e^{-k_1x}\int_0^t H\left(\tau-\frac{x}{v_1}\right)\times f(t-\tau)d\tau\right\} \quad (29)$$

式中

$$\overline{A}=A\beta/\left\{\frac{1}{v_2}\left(1-\frac{1}{v_2^2}\right)-\frac{1}{v_1}\left(1-\frac{1}{v_1^2}\right)\right\}$$

$$H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geqslant 0\end{cases}$$ 为 Heavlside 函数

从(27～28)式可以清楚地看出温度和应力都将以两个波速传播，这与用经典 Fourier 热传导定律得到的解完全不同[2,3]，与[7]的结果一致。v_2、v_1 分别被称为快波和慢波的无量纲波速。快波是以热波波速传播，而慢波则是以弹性波速传播。(27～29)式中的第一项表示快波在其波前附近的温度、应力和位移分布。第二项表示慢波对应量的分布。当 $x=tv_{1,2}$ 时，温度和应力将发生间断，其间断量为:

$$[T]_{x=tv_{1,2}}=\mp\overline{A}\left(1-\frac{1}{v_{1,2}^2}\right)e^{-k_{1,2}x} \quad (30)$$

$$[\sigma]_{x=tv_{1,2}}=\pm\overline{A}e^{-k_{1,2}x} \quad (31)$$

五、长 时 解

根据积分变换理论[8]，在 $p\to 0$ 时(22～24)将反映出长时解性质，这相当于 $t\to\infty$。这时由(20)式有:

$$\alpha_2\approx 0,\ \alpha_1\approx\sqrt{p(1+e)} \quad (32)$$

将(32)代入(22～24)并作 Laplace 逆变换:

$$T(x,\ t)=\frac{A}{\sqrt{1+e}}\int_0^t\frac{1}{\pi\tau}e^{\frac{1+e}{4}x^2/\tau}\times f(t-\tau)d\tau \quad (33)$$

$$\sigma(x,t)=-\frac{A}{(1+e)^{3/2}}\times\int_0^t \operatorname{erf}\left[\frac{(1+e)^{1/2}}{2\sqrt{\tau}}x\right]\times f_1(t-\tau)d\tau \tag{34}$$

$$u(x,t)=-\frac{A}{1+e}\times\int_0^t \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{1+e}{\tau}}\frac{x}{2}\right]f(t-\tau)d\tau \tag{35}$$

式中 $\operatorname{erf}(x)$、$\operatorname{erfc}(x)$ 分别为误差函数和余误差函数，$f_1(t)=L^{-1}[p^{3/2}F(p)]$。

(33～35)式就是经典 Fourier 热传导定律下热力耦合的热弹性波长时解，只要我们具体地给出激光脉冲时间形状函数 $f(t)$，就可以通过(27～29)及(33～35)式完全地解出热击波问题。

如在(33)式中令 $e=0$

$$T(x,t)=A\int_0^t \frac{1}{\pi\tau}e^{\frac{-x^2}{4\tau}}f(t-\tau)d\tau \tag{33'}$$

这就是[9] 所得到的温度表达式。由此可见[3, 9, 10] 所讨论的情况都可以从 (22～24) 式在不同条件下简化而得到。

六、与经典理论的比较

作为例子我们只讨论一种材料 $e=0.03$，$\beta=0.97$[7]，这组数值对应于 2024S-T4Al。这时 $Q=0.116$，$v_1=0.924$，$v_2=1.098$，$k_1=0.278$，$k_2=0.235$。

考虑连续激光器：

$$f(t)=H(t) \tag{36}$$

按文献[2, 3]的理论，求得在变换域内：

$$\tilde{T}=\frac{A}{p^{3/2}}e^{-\sqrt{p}\,x} \tag{37}$$

$$\tilde{\sigma}=p\left(\frac{A}{p^{3/2}}+1\right)\left(e^{-\sqrt{p}x}-e^{-px}\right) \tag{38}$$

$$\tilde{u}=A\left\{\frac{1}{p^{5/2}}\left(\frac{1}{1-p}-1\right)e^{-px}-\frac{1}{p^2(1-p)}e^{-\sqrt{p}x}\right\} \tag{39}$$

1．短时解：

把 $F(p)=\dfrac{1}{p}$ 代入(22)、(23)并令 $p\to\infty$，求 Laplace 逆变换：

$$T=\frac{A\beta}{\varphi_1}\left[\varphi_3{}^{-k_2x}H\left(t-\frac{x}{v_2}\right)-\varphi_2e^{-k_1x}H\left(t-\frac{x}{v_1}\right)\right] \tag{40}$$

$$\sigma=-\frac{A\beta}{\varphi_1}\left[e^{-k_2x}H\left(t-\frac{x}{v_2}\right)-e^{-k_1x}H\left(t-\frac{x}{v_1}\right)\right] \tag{41}$$

式中

$$\varphi_2=\left(1-\frac{1}{v_1^2}\right),$$

$$\varphi_3=\left(1-\frac{1}{v_2^2}\right),$$

$$\varphi_1=\frac{1}{v_2}\varphi_3-\frac{1}{v_1}\varphi_2$$

在 $p\to\infty$ 时对 (37)、(38) 作 Laplace 逆变换，得经典解为：

$$T=\frac{2A}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,e^{-x^2/4x}-4x\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\Big/\sqrt{t}\right) \tag{42}$$

$$\sigma=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2t}-3\right)\frac{1}{t^{5/2}}e^{-x^2/4t} \tag{43}$$

不妨令 $A=1$。修正理论和经典理论的比较见图 1 和 2。

2．长时解：

在 $p\to0$ $(t\to\infty)$下，修正理论的温度，位移分布为：

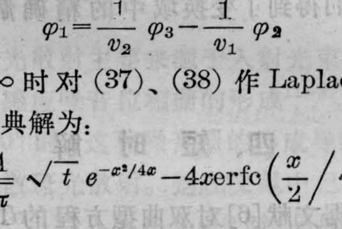

图 1

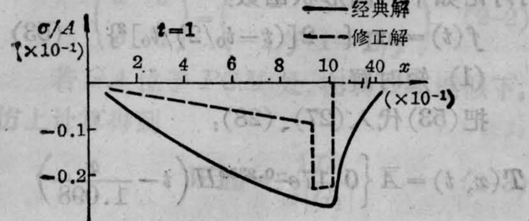

图 2

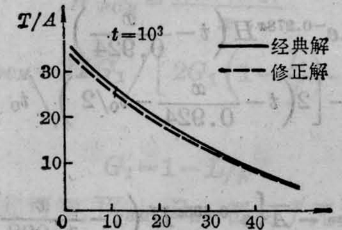

图 3

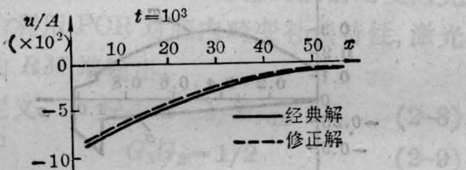

图 4

$$T=\frac{A}{(1+e)^{3/2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}te^{-x^2/4t}\right.$$

$$\left.-x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{44}$$

$$u=-\frac{A}{1+e}\left\{\left(t+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{t}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4t}\right\} \tag{45}$$

经典理论为:

$$T=A\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}t\,e^{-x^2/4t}-x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{46}$$

$$u=-A\left\{\left(t+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{t}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4t}\right\} \tag{47}$$

长时温度、位移分布比较见图 3 和 4。

由此可见在短时近似下非 Fourier 效应显著，热波波速不再是无限大。在长时近似下，理论回到经典的耦合理论。由于计入了耦合系数 e 的影响，所以温度和位移的绝对值比非耦合理论稍低，这与[10]的结果一致。如令 $e=0$，则与[2]的结果完全一致。

七、脉冲激光冲击算例

我们仍然以(六)中讨论的材料为例，讨论两种脉冲时间形状函数，矩形分布和 Gaussian 分布。前者在数学上比较简单，而后者更接近于真实的脉冲分布。

7.1. 矩形分布

这时

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0 & t>t_0\end{cases} \tag{48}$$

其中t_0为无量纲脉冲时间，我们取 $t_0=1$。

(1) 短时解:

把数值代入后，(27)、(28)式为:

$$T(x,t)=\bar{A}\left\{0.17e^{-0.235x}H\left(t-\frac{x}{1.098}\right)+0.171e^{-0.278x}\right.$$

$$\left.\times H\left(t-\frac{x}{0.924}\right)\right\} \tag{49}$$

$$\sigma(x,t)=-\bar{A}\left\{e^{-0.235x}H\left(t-\frac{x}{1.098}\right)\right.$$

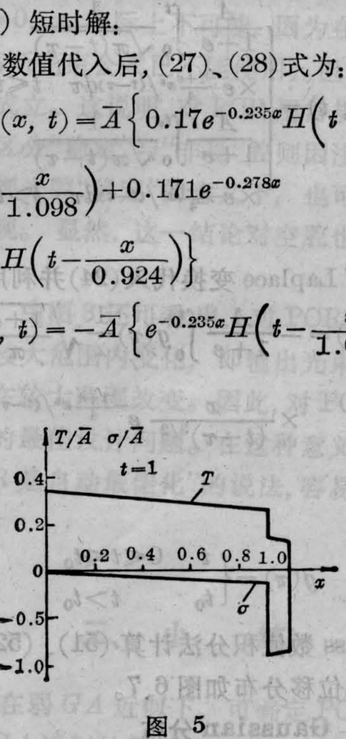

图 5

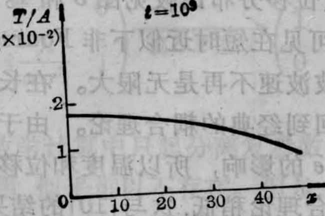

图 6

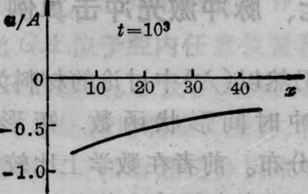

图 7

$$-e^{-0.278x}H\left(t-\frac{x}{0.924}\right)\Big\}\qquad(50)$$

温度及应力传播情况如图 5。

(3) 长时解:

由(33)式并利用卷积性质:

$$T(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+e}\displaystyle\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\\ \times e^{-\frac{1+e}{4}x^2/(t-\tau)}d\tau\quad t\leqslant t_0\\ \dfrac{A}{1+e}\displaystyle\int_0^{t_0}\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\\ \times e^{-\frac{1+e}{4}x^2/(t-\tau)}d\tau\quad t>t_0\end{cases}\qquad(51)$$

把 $f(t)$ 的 Laplace 变换代入(24)并利用(32)

$$u(x,\ t)=-\frac{A}{1+e}\int_0^t g(\tau)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{\pi}}\times\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{1+e}{4}x^2/(t-\tau)}d\tau\qquad(52)$$

式中

$$g(\tau)=\begin{cases}t & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ t_0 & t>t_0\end{cases}$$

利用 Gauss 数值积分法计算 (51)、(52)，得到温度和位移分布如图 6、7。

7.2. Gaussian 分布

为了更接近于脉冲激光的真实情况，我们讨论如下时间形状函数:

$$f(t)=\exp\{-2[(t-t_0/2)/t_0]^2\}\qquad(53)$$

(1) 短时解:

把(53)代入(27)、(28):

$$\begin{aligned}T(x,\ t)=\overline{A}\Big\{&0.17e^{-0.235x}H\left(t-\frac{x}{1.098}\right)\\ &\times\exp\left\{-\left[2\left(t-\frac{x}{1.098}-t_0/2\right)\Big/t_0\right]^2\right\}\\ &+0.171e^{-0.278x}H\left(t-\frac{x}{0.924}\right)\\ &\times\exp\left\{-\left[2\left(t-\frac{x}{0.924}-t_0/2\right)\Big/t_0\right]^2\right\}\Big\}\end{aligned}\qquad(54)$$

$$\sigma(x,\ t)=-\overline{A}\Big\{e^{-0.235x}H\left(t-\frac{x}{1.098}\right)$$

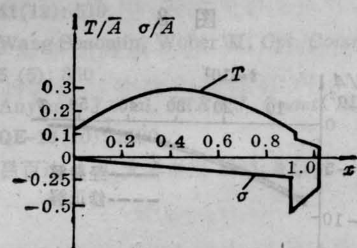

图 8

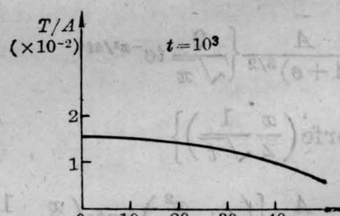

图 9

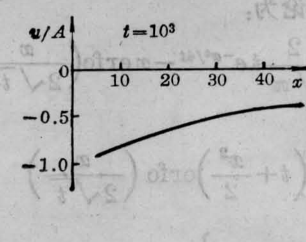

图 10

$$\times \exp\left\{-\left[2\left(t-\frac{x}{1.098}-\frac{t_0}{2}\right)\Big/t_0\right]^2\right\}$$
$$-e^{-0.278x}H\left(t-\frac{x}{0.924}\right)$$
$$\times \exp\left\{-\left[2\left(t-\frac{x}{0.924}-\frac{t_0}{2}\right)\Big/t_0\right]^2\right\}\Bigg\} \tag{55}$$

$t=1$ 时弹性波传播情况如图 8。

(2) 长时解:

把$F(p)$代入(22)、(24)式,在(32)的条件下作Maclaurin 展开并求其逆Laplace 变换:

$$T=\frac{A}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+e)t}}e^{-\frac{1+e}{4}x^2/t} \tag{56}$$

$$u=-\frac{A}{1+e}\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{t}}x\right) \tag{57}$$

长时温度及位移分布如图 9、10。

八、结果与讨论

从以上的讨论中，我们可以得到以下结论:

1. 在波前近似下,温度和应力都以两个波速传播并在其波前发生间断，这与[5, 7]的结果一致。但[5]在计算中认为热力耦合导数 e 很小而忽略，因而得到的温度分布只有一处间断，而[7]认为在(9)式中 $e\beta$ 项比 e、β 项要小,因而忽略，事实上这种近似只有在 $p\to 0$ 的条件下才成立，所以[7]的讨论也忽略了短时解上的热力耦合。

2. 在长时近似下理论将回到经典Fourier 热力耦合热弹性波解。图 3、4 表明热力耦合系数 $e(e>0)$ 的存在将抑制温度的增长，这可以用能量观点解释。变形的发展消耗了一部分能量而使温度升高受到影响。

3. 如不考虑热力耦合($e=0$),我们的理论与[2, 3]完全一致。

4. 以往热弹性波解(特别是考虑热力耦合),只能在特殊的边界条件下得到[11],而我们所用的 Fourier 正、余弦变换并利用待定边界常数的方法将不受这一限制。

5. 我们的讨论限制在热弹范围内,因此这种方法对其它高能密度流引起的弹性波(例如电磁波,X 射线等)也都能适用。

以上讨论还是在一维条件下，而实际激光冲击问题应是一个轴对称问题，因此理论还有待于推广。

感谢李永池副教授给予的指导和帮助。

参 考 文 献

1 White R M. *J. Appl. Phys.*, 1963; **34**: 2123
2 White R M. *J. Appl. Phys.*, 1963; **34**: 3559
3 Penner S S *et al. J. Appl. Phys.*, 1966; **37**: 2304
4 Apollonov V V *et al. Sov. J. Quant. Electr.*, 1982; **12**(2): 188
5 Kao T T. *AIAA J.*,1976; **14**(6): 818
6 Knopoff L *et al. A. Acoust. Soc. Am.*, 1959; **31**: 1161
7 Lord H W *et al. J. Mech. Phys. Solids*, 1967; **15**: 299
8 Zauderer R. Partial Differental Eou. of Applied Math., New York, 1983
9 Bechtel J H. *J. Appl. Phys.*, 1975; **46**(4); 1585
10 Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity, 1975
11 Wilms E V *et al. Mech. Research Communication*, 1985; **12**(1): 41