

虚共心腔模式的物理光学分析

陈钟鸣

(合肥工业大学激光所)

提要: 虚共心腔具有很好的模式选择能力。本文通过一些数学处理得到虚共心腔模式分布的本征解。

Physical optics analysis on virtual concentric resonator modes

Chen Zhongmin

(Laser Institute, Hefei Polytechnical University, Hefei)

Abstract: A virtual concentric resonator has very good mode-selection ability. The eigen solutions of the field distribution of a virtual concentric resonator have been derived in the paper by using fundamental mathematic processing.

一、自洽积分方程

由图1有

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta} \quad (1)$$

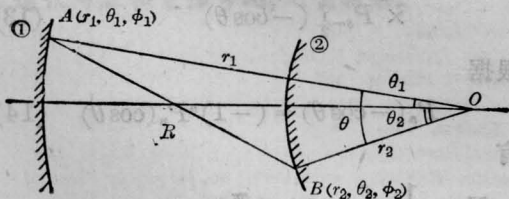


图1 虚共心腔

根据球面三角余弦定理:

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (2)$$

在球坐标系中谐振腔的积分方程为:

$$\begin{aligned} & bu(r_1, \theta_1, \phi_1) \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} u(r_2, \theta_2, \phi_2) \\ & \quad \times r_2^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

b 为本征值, $u(r_1, \theta_1, \phi_1)$ 为腔片①上的场分布, $u(r_2, \theta_2, \phi_2)$ 为腔片②上的场分布。

因为 r_1, r_2 为定值, 方程(3)可化为:

$$\begin{aligned} & bu(\theta_1, \phi_1) \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} u(\theta_2, \phi_2) \\ & \quad \times r_2^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2 \end{aligned} \quad (4)$$

二、级数展开式

由(1)、(2), $\frac{e^{-ikR}}{R}$ 可表示为如下级数^[1]:

收稿日期: 1987年3月27日。

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = -ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \xi_n^{(2)}(kr_1) \times \psi_n(kr_2) P_n(\cos \theta) \quad (5)$$

n 为正整数

$$\xi_n^{(2)}(kr_1) = \left(\frac{\pi}{2kr_1}\right)^{\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_1) \quad (6)$$

$$\psi_n(kr_2) = \left(\frac{\pi}{2kr_2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr_2) \quad (7)$$

利用复变函数残数定理可将 $\frac{\pi}{\cos \pi s}$ 展成无穷级数。

函数 $F(s) = \frac{\pi}{\cos \pi s}$ 是半纯的，并且以 $\cos \pi s$ 为零的那些点作为它的奇点。 $\cos \pi s = 0$, $s = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n+1}{2}, \dots$ 。而在这些点上 $(\cos \pi s)'_s = -\pi \sin \pi s = \pm \pi \neq 0$ ，因此 $s_n = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n+1}{2}, \dots$ 为简单奇点。关于这些点的残数可按一阶极点公式计算。通过一系列推导可证明：

$$\frac{\pi}{\cos \pi s} = \frac{1}{s - \frac{1}{2}} - \sum'_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{s - n - \frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right) \quad (8)$$

\sum' 撇号表示除去 $n=0$ 一项。

在 s 复平面上，在 s 的每一个有界区域内不难证明级数(8)一致收敛。有了级数展开式(8)、(8)我们可以去求积分方程(4)的解。

三、积分方程的解

设 $f(z)$ 是某闭域内解析函数，则由柯西积分公式有：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (9)$$

C 是围线， z 是围线中任意一点。

同时有

$$\oint f(s) ds = 0 \quad (10)$$

研究积分

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} f(s) \frac{\pi}{\cos \pi s} ds \quad (11)$$

其中 C_0 为无限长积分路径，如图 2 所示。

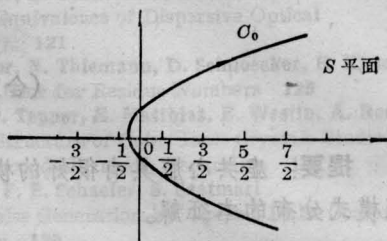


图 2 围线积分路径

因为在围线 C_0 右边有奇点 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ，积分路径为负向，则由公式(10)、(11)得，

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(s) \frac{ds}{s - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi i} \\ &\times \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{C_0} \frac{f(s)}{s - n - \frac{1}{2}} ds + \int_{C_0} \frac{f(s)}{n} ds \right] \\ &= -f\left(\frac{1}{2}\right) + \sum'_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} f\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

设

$$\begin{aligned} f(s) &= 2ik s \xi_{s-\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_1) \psi_{s-\frac{1}{2}}(kr_2) \\ &\times P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

根据

$$P_n(-\cos \theta) = (-1)^n P_n(\cos \theta) \quad (14)$$

有

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(s) \frac{\pi}{\cos \pi s} ds \\ &= k \int_{C_0} \xi_{s-\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_1) \psi_{s-\frac{1}{2}}(kr_2) \\ &\times P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \frac{s ds}{\cos \pi s} \\ &= ik \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \xi_{s-\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_1) \psi_{s-\frac{1}{2}}(kr_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) \frac{2\pi s}{\cos\pi s} ds \\ & = -ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \xi_n^{(2)}(kr_1) \psi_n(kr_2) \\ & \quad \times P_n(\cos\theta) \\ & = \frac{e^{-ikR}}{R} \end{aligned} \quad (15)$$

也就是说式(5)的级数展开式可用式(15)的围线积分来表示。

用分离变量法来解方程(4)

设 $b_{mn}u_{mn}(\theta, \phi) = b_{mn}P_{\nu_n}^m(\cos\theta)e^{-im\phi}$
 $P_{\nu_n}^m(\cos\theta)$ 是连带勒让德多项式, ν_n 为正实数。

有

$$\begin{aligned} I_1 &= b_{mn}u_{mn}(\theta_1, \phi_1) = b_{mn}P_{\nu_n}^m(\cos\theta_1)e^{-im\phi_1} \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} P_{\nu_n}^m(\cos\theta_2) e^{-im\phi_2} \\ & \quad \times r_2^2 \sin\theta_2 d\theta_2 d\phi_2 \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^\alpha P_{\nu_n}^m(\cos\theta_2) r_2^2 \sin\theta_2 d\theta_2 \\ & \quad \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} e^{-im\phi_2} d\phi_2. \end{aligned} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} e^{-im\phi_2} d\phi_2 \\ &= k \int_{C_0} \xi_n^{(2)} s^{-\frac{1}{2}}(kr_1) \psi_{s-\frac{1}{2}}(kr_2) \frac{s ds}{\cos\pi s} \\ & \quad \times \int_0^{2\pi} P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) e^{-im\phi_2} d\phi_2. \end{aligned} \quad (17)$$

由球函数加法定理^[2]

$$\begin{aligned} & P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) \\ &= (-1)^{s-\frac{1}{2}} \sum_{l=-(s-\frac{1}{2})}^{s-\frac{1}{2}} \frac{(s-\frac{1}{2}-l)!}{(s-\frac{1}{2}+l)!} \\ & \quad \times P_{s-\frac{1}{2}}^l(\cos\theta_1) P_{s-\frac{1}{2}}^l(\cos\theta_2) \\ & \quad \times e^{il(\phi_2-\phi_1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

当 $l \neq m$, 式(17)中积分

$$\int_0^{2\pi} P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) e^{-im\phi_2} d\phi_2 = 0 \quad (19)$$

当 $l = m$, 积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) e^{-im\phi_2} d\phi_2 \\ &= (-1)^{s-\frac{1}{2}} 2\pi \frac{(s-\frac{1}{2}-m)!}{(s-\frac{1}{2}+m)!} \\ & \quad \times P_{s-\frac{1}{2}}^m(\cos\theta_1) P_{s-\frac{1}{2}}^m(\cos\theta_2) e^{-im\phi_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

所以

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\pi ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n'+1) \frac{(n'-m)!}{(n'+m)!} \\ & \quad \times \xi_{n'}^{(2)}(kr_1) \psi_{n'}(kr_2) P_{n'}^m(\cos\theta_1) \\ & \quad \times P_{n'}^m(\cos\theta_2) e^{-im\phi_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= b_{mn}u_{mn}(\theta_1, \phi_1) \\ &= r_2^2 k^2 (1-\cos\alpha) \xi_0^{(2)}(kr_1) \psi_0(kr_2) \\ & \quad + r_2^2 k^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n'+1) \frac{(n'-m)!}{(n'+m)!} \\ & \quad \times \xi_{n'}^{(2)}(kr_1) \psi_{n'}(kr_2) P_n^m(\cos\theta_1) \\ & \quad \times P_n^m(\cos\theta_2) P_{\nu_n}^m(\cos\theta_2) \sin\theta_2 d\theta_2 \end{aligned} \quad (22)$$

利用球函数的积分表示式^[1]

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos\phi) &= \frac{(-1)^m (n+m)!}{\Gamma(m+\frac{1}{2})(n-m)!} \\ & \quad \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin^{-m}\phi \int_0^\pi (\cos t - \cos\phi)^{m-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned} \quad (23)$$

m, n 为自然数, $0 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned} P_p^q(\cos\phi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^q\phi}{\Gamma(\frac{1}{2}-q)} \\ & \quad \times \int_0^\pi \frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)t dt}{(\cos t - \cos\phi)^{q+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (24)$$

$0 < \phi < \pi$, $\text{Re}(q) < \frac{1}{2}$; p, q 为实数, 及

积分^[1]

$$\int_0^1 (1-t^2)^p \cos 2\beta t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-p-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} & \times \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) J_{p+\frac{1}{2}}(2\beta) \\ & \times \operatorname{Re}(p) > -1, \end{aligned} \quad (25)$$

当 $\alpha < 5^\circ$, $0 \leq \theta_2 \leq \alpha$, (这对于固体激光器来说常常是可以满足的),

$$\begin{aligned} P_{n'}^m(\cos \theta_2) & \approx \frac{(-1)^m (n' + m)!}{(n' - m)!} \\ & \times \left(n' + \frac{1}{2}\right)^{-m} J_m\left[\left(n' + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P_{v_n}^m(\cos \theta_2) & = \frac{(-1)^m \Gamma(v_n + m + 1)}{\Gamma(v_n - m + 1)} \\ & \times \left(v_n + \frac{1}{2}\right)^{-m} J_m\left[\left(v_n + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] \end{aligned} \quad (27)$$

所以,

$$\begin{aligned} I_1 & \approx r_2^2 k^2 \xi_0^{(2)}(kr_1) \psi_0(kr_2) (1 - \cos \alpha) \\ & + r_2^2 k^2 \int_0^\alpha \sum_{n=1}^\infty (2n' + 1) \left(n' + \frac{1}{2}\right)^{-m} \\ & \times \left(v_n + \frac{1}{2}\right)^{-m} \frac{\Gamma(v_n + m + 1)}{\Gamma(v_n - m + 1)} \\ & \times \xi_n^{(2)}(kr_1) \psi_n(kr_2) P_n^m(\cos \theta_1) \\ & \times e^{-im\phi_1} J_m\left[\left(n' + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] J_m \\ & \times \left[\left(v_n + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] \theta_2 d\theta_2 \end{aligned} \quad (28)$$

研究积分

$$\begin{aligned} I & = \int_0^\alpha \theta_2 J_m\left[\left(n' + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] \\ & \times J_m\left[\left(v_n + \frac{1}{2}\right)\theta_2\right] d\theta_2 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \left(n' + \frac{1}{2}\right)\theta_2 = \mu_{mn'} \frac{\alpha}{\pi} \theta_2,$$

$$\left(v_n + \frac{1}{2}\right)\theta_2 = \mu_{mn} \frac{\alpha}{\pi} \theta_2,$$

μ_{mn} 、 $\mu_{mn'}$ 分别为 $J_m = 0$ 时第 n 和 n' 正根。则有

$$\begin{aligned} I & = \frac{\mu_{mn} \mu_{mn'}}{\left(v_n + \frac{1}{2}\right) \left(n' + \frac{1}{2}\right)} \\ & \times \int_0^{\left(n' + \frac{1}{2}\right)\alpha} \frac{\alpha}{\mu_{mn'}} \theta_2' J_m(\mu_{mn'} \theta_2') \\ & \times J_m(\mu_{mn} \theta_2') d\theta_2' \end{aligned} \quad (29)$$

根据基尔霍夫衍射积分定理和积分中值定理, 可以证明:

$$\begin{aligned} I & \approx \frac{\mu_{mn}}{\left(v_n + \frac{1}{2}\right) \left(n' + \frac{1}{2}\right)} \\ & \times \int_0^1 \theta_2' J_m(\mu_{mn} \theta_2') J_m(\mu_{mn'} \theta_2') d\theta_2' \end{aligned} \quad (30)$$

当 $v_n \neq n'$, $I_1 = 0$

$v_n = n' = n$,

$$I_1 = \frac{1}{2} \mu_{mn} \frac{J_{m+1}^2(\mu_{mn})}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (31)$$

所以

$$\begin{aligned} I_1 & = r_2^2 k^2 \xi_0^{(2)}(kr_1) \psi_0(kr_2) (1 - \cos \alpha) \\ & + \frac{(n + m)! \mu_{mn}}{(n - m)! \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2m+1}} \\ & \times J_{m+1}^2(\mu_{mn}) r_2^2 k^2 \xi_n^{(2)}(kr_1) \\ & \times \psi_n(kr_2) P_n^m(\cos \theta_1) e^{-im\phi_1} \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\theta_1 = \frac{2n+1}{\mu_{mn}\alpha} \frac{\pi}{2} \theta_1, \quad 0 \leq m \leq n_0.$$

式(32)中第一项对所有模式振荡的贡献一样, 为荧光辐射项, 当 α 很小时可以略去。

一般 kr_1 、 kr_2 值都很大, 由渐近公式有:

$$\xi_n^{(2)}(kr_1) \approx \frac{1}{kr_1} e^{-i\left(kr_1 - \frac{n+1}{2}\pi\right)}, \quad (33)$$

$$\psi_n(kr_2) \approx \frac{1}{kr_2} \cos\left(kr_2 - \frac{n+1}{2}\pi\right), \quad (34)$$

所以

$$\begin{aligned} I_1 & = b_{mn} \mu_{mn}(\theta_1, \phi_1) \\ & = \frac{(m+n)! \mu_{mn}}{(n-m)! \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2m+1}} J_{m+1}^2(\mu_{mn}) \\ & \times \frac{r_2}{r_1} \cos\left(kr_2 - \frac{n+1}{2}\pi\right) \\ & \times e^{-i\left(kr_1 - \frac{n+1}{2}\pi\right)} P_n^m \\ & \times \left[\cos\left(\frac{2n+1}{\mu_{mn}\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \theta_1\right)\right] e^{-im\phi_1} \end{aligned} \quad (35)$$

为使模式指数与 m 、 n 取值对应, 可将式(35)中的 n 改写为 $n+1$, 这样 $n=0, 1, 2, 3, \dots$, 于是

$$b_{nm} = \frac{(m+n+1)! \mu_{m(n+1)}}{(n-m+1)! \left(n + \frac{3}{2}\right)^{2m+1}} \times J_{m+1}^2[\mu_{m(n+1)}] \frac{r_2}{r_1} \times \cos \left[kr_2 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi \right] \times e^{-i \left[kr_1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi \right]} \quad (36)$$

$$u_{mn}(\theta_1, \phi_1) = P_{n+1}^m \left\{ \cos \left[\frac{2n+3}{\mu_{m(n+1)}} \alpha \right] \times \frac{\pi}{2} \theta_1 \right\} e^{-im\phi_1} \quad (37)$$

式(36)两边同除 $\frac{2}{3} \mu_{01} J_1^2(\mu_{01})$ 得

$$\bar{b}_{mn} = \frac{2}{3} \frac{(m+n+1)! \mu_{m(n+1)}}{(n-m+1)! \left(n + \frac{3}{2}\right)^{2m+1}} \cdot \frac{1}{\mu_{01}} \times J_{m+1}^2[\mu_{m(n+1)}] \frac{1}{J_1^2(\mu_{01})} \times \frac{r_2}{r_1} \cos \left[kr_2 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi \right] \times e^{-i \left[kr_1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi \right]} \quad (38)$$

\bar{b}_{mn} 为方程(4)解的本征值, 当 $m=n=0$,

$$|\bar{b}_{00}| = \frac{r_2}{r_1} \quad (39)$$

四、关于解的分析

必须指出由于虚共心腔内振荡是由同一中心发出的不同模式分布的波(下面将分析到), 因此在球坐标下, 可以用单程自洽再现

表1 归一后本征值 $|\bar{b}'_{mn}|$

$ \bar{b}'_{mn} $	m				
	0	1	2	3	4
n	0	1			
	1	*0.58	*0.09		
	2	0.42	0.02	0.00	
	3	*0.33	*0.00	*0.00	*0.00
	4	0.28	0.00	0.00	0.00

* 表示不能产生振荡的模式(不含简并)

的方程(4)来描述其过程。这点与其他非对称球面腔是不一样的。

另外, 本征函数 $u_{mn}(\theta_1, \phi_1)$ 反映了振荡模式的角谱分布, 因此无须再作一次傅里叶变换。

归一后 $|\bar{b}'_{mn}|$ 的相对值如表1所示。从表1中可看出虚共心腔对高次模抑制能力是很强的。

虚共心腔共振模的衍射损失是

$$L_{mn} = 1 - \left| \frac{2}{3} \times \frac{(m+n+1)! \mu_{m(n+1)}}{(n-m+1)! \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2m+1}} \mu_{01} \times \frac{J_{m+1}^2[\mu_{m(n+1)}] r_2}{J_1^2(\mu_{01}) r_1} \right|^2 \quad (40)$$

由于有限孔径的衍射效应, 式(41)中 r_2 越小 L_{mn} 越大; r_2 越大, L_{mn} 越小。

当 $m=n=0$,

$$L_{00} = 1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad (41)$$

附加相移为

$$\Delta_{mn} = \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi - kr_1 \quad (42)$$

Δ_{mn} 与 r_2 无关。

这说明: (1) 虚共心腔共振模式的等相位面与腔片重合, 可认为是由同一中心发出的一系列球面波振荡, 而在其他球面非稳腔里, 等相位面与腔片并不一致。(2) Δ_{mn} 与指数 m 无关。对于 m 不同 n 相同的波型振荡, 其附加相移是一样的, 这是圆对称虚共心腔的另一个特点。

谐振条件为

$$kr_1 + \Delta_{mn} = \left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi = \pi q$$

即

$$\frac{n}{2} + 1 = q \quad (43)$$

q 为整数, 故 n 必为偶数和0。也就是说 $n=0, 2, 4, 6, 8, \dots$, 才能形成振荡。

虚共心腔的模式鉴别能力为

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1 - \left| 0.42 \frac{r_2}{r_1} \right|^2}{1 - \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^2}$$

$$= 0.18 + 0.82 \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (44)$$

当 $r_2=0$, $L_2/L_1=1$ 没有区别。随 r_2 增大, 低阶模衍射损失减小较快, 当 $\frac{r_2}{r_1}=0.9$, $\frac{L_2}{L_1} \approx 5$ 。

如果把等效谐振腔长 $L=r_1$ 用费涅尔数 N 表示, 则 $r_1 = \frac{C}{2\pi k \alpha^2}$, $C=2\pi N$ 。代入 \bar{b}_{mn} 可得到同样的讨论结果。

现在来研究本征函数

$$u_{mn}(\theta_1, \phi_1)$$

$$= P_{n+1}^m \left[\cos \frac{2n+3}{\mu_{m(n+1)} \alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \theta_1 \right] \cdot e^{-im\phi_1} \quad (45)$$

其中 $e^{-im\phi_1}$ 确定了晶片①上沿圆周的角向场分布, P_{n+1}^m 则反映了沿曲线径向的角向场分布。

从第一类规格化勒让德关联函数曲线^[3]可以得出曲线径向场分布的峰点数应满足如下关系 ($0 < \theta_1 < \alpha$):

$$\text{峰点数} = \frac{1}{2}(n-m+1) \quad \left(\text{逢 } \frac{1}{2} \text{ 取 } 1 \right) \quad (46)$$

当 $m \neq 0$, $\theta_1=0$ 为谷点; 如 P_4^1 , $\frac{n-m+1}{2} =$

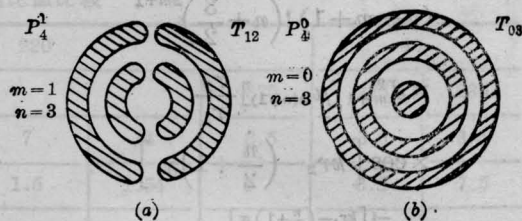


图3 P_4^1, P_4^0 模式分布

2, 模式分布为 T_{12} , 见图 3(a); 当 $m=0$, $\theta_1=0$ 为峰点; 如 P_4^0 , $\frac{n-m+1}{2} = 2\frac{1}{2}$, 模式分布为 T_{03} , 见图 3(b)。

同时还可以看出当 $n-m$ 值相等时, 振荡模式是简并的。

当 $m=n=0$, 从表 1 以及本征函数 $u_{mn}(\theta_1, \phi_1)$ 可看出基模占有较大的模体积和较小的衍射损耗, 所以基模 T_{00} 很容易首先被激发, 因而虚共心腔具有较好的模式选择能力。

参 考 文 献

- 1 Ⅱ. М. 雷日克, Ⅱ. С. 格拉德日坦. 函数表与积分表, 北京: 高等教育出版社, 1959: 383, 413, 394, 194.
- 2 郭敦仁. 数学物理方法, 北京: 人民教育出版社, 1978: 283.
- 3 安德烈·安戈著, 陆志刚等译校. 电工电信工程师手册(下册), 北京: 人民邮电出版社, 1979: 161~162.

m					nm
0	1	2	3	4	
00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	0
00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	1
00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	2
00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	3
00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	4

(续前页) 表 1 中未列出的数据均用 00.0 表示