中国激光
第15卷 第8期

单模激光的反聚束效应

顾 樵
(西北大学物理系)

提要：从原子-场密度算符的普遍库理论出发，考虑到线性及非线性增益的共同影响，确定了单模激光光子分布的表达式。结果表明，在一定的条件下，存在着光子反聚束。

Photon antibunching in a single mode laser light

Gu Qiao
(Department of Physics, Northwset University, Xian)

Abstract: Starting from general reservoir theory for the atomic-field density operator, the expression for the photon distribution in single-mode laser light is determined by taking account of the influence of both linear and nonlinear gains.

按照传统的激光光子统计[1]，稳态单模激光的光子几率在高于阈值而激发不太强的情况下，呈现超泊松分布；在甚强激发情况下，呈现泊松分布，不出现亚泊松分布，即不存在光子反聚束。

本文将要论证，在一定的条件之下，存在着激光光子反聚束。

一、场密度算符矩阵元的时间演化

先考虑一个二能级原子在通过激光腔时与单模场相互作用。总系统的 Hamiltonian 在旋波近似下写为[2]

$$H=\hbar\omega a^{+}a+\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z+\hbar g(a^{+}\sigma^{-}+a\sigma^{+}),\qquad(1.1)$$

这里 a 和 a^{+} 分别是单模场的湮灭和产生算符。σ_z、$\sigma^{\pm}$ 分别是原子的反转算符和能级升、降算符。ω 是单模场的频率，ω_0 是原子的能级间隔，g 是耦合常数。

(1.1)所示的算符有下面的本征方程[3]

$$H|\phi_i\rangle=E_i|\phi_i\rangle\quad(i=1,\ 2,\ 3),\qquad(1.2)$$

式中本征值为

$$E_1=\hbar\Big[\omega\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+\Omega_n\Big],\qquad(1.3a)$$

$$E_2=\hbar\Big[\omega\Big(n+\frac{1}{2}\Big)-\Omega_n\Big],\qquad(1.3b)$$

$$E_3=-\frac{1}{2}\hbar\omega_0,\qquad(1.3c)$$

这里

$$\Omega_n=\Big[\Big(\frac{\Delta}{2}\Big)^2+g^2(n+1)\Big]^{1/2}\qquad(1.4)$$

是量子 Rabi 频率，$\Delta=\omega-\omega_0$ 是失谐量。与(1.3)式相应的本征态为

$$|\phi_1\rangle=\cos\theta_n|n+1,\ b\rangle+\sin\theta_n|n,\ a\rangle,\qquad(1.5a)$$

收稿日期：1987年2月18日。

$$|\phi_2\rangle=-\sin\theta_n|n+1,\ b\rangle+\cos\theta_n|n,\ a\rangle, \tag{1.5b}$$

$$|\phi_3\rangle=|0,\ b\rangle, \tag{1.5c}$$

这里 $\theta_n=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{g\sqrt{n+1}}{\dfrac{\Delta}{2}+\Omega_n}\right)$。

而$|n,\ \alpha\rangle$是无耦合的场与原子的能量本征态($\alpha=a$、b,分别表示原子的上、下能级),即

$$(a^+a+\sigma_z)|n,\ \alpha\rangle=(n\pm1)|n,\ \alpha\rangle。 \tag{1.6}$$

(1.5)的本征态是正交归一完备的,即

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\delta_{ij}, \tag{1.7a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{3}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|=1。 \tag{1.7b}$$

用$|\phi_1\rangle$和$|\phi_2\rangle$表示$|n,\ \alpha\rangle$是有用的,由(1.5a)、(1.5b)及(1.7a)不难得到

$$|n+1,\ b\rangle=\cos\theta_n|\phi_1\rangle-\sin\theta_n|\phi_2\rangle, \tag{1.8a}$$

$$|n,\ a\rangle=\sin\theta_n|\phi_1\rangle+\cos\theta_n|\phi_2\rangle。 \tag{1.8b}$$

为了后面的需要,我们计算时间演化算符

$$U(\tau)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\tau\right)$$

在$|n,\ \alpha\rangle$态中的矩阵元$\langle n\alpha|U(\tau)|n'\alpha'\rangle$。利用(1.8)及(1.7a)可以求出所有非零的矩阵元。它们是

$$\langle n+1,\ b|U(\tau)|n+1,\ b\rangle=a_n=\cos^2\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau}+\sin^2\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_2\tau}, \tag{1.9a}$$

$$\langle n,\ a|U(\tau)|n,\ a\rangle=c_n=\sin^2\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau}+\cos^2\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_2\tau}, \tag{1.9b}$$

$$\langle n+1,\ b|U(\tau)|n,\ a\rangle=b_n=\sin\theta_n\cos\theta_n\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau}-e^{-\frac{i}{\hbar}E_2\tau}\right)。 \tag{1.9c}$$

特别是,在τ时间内发射或吸收一个光子所引起的跃迁几率为

$$B_n=|b_n|^2=\frac{4g^2(n+1)}{\Delta^2+4g^2(n+1)}\times\sin^2\frac{\tau}{2}\sqrt{\Delta^2+4g^2(n+1)}。 \tag{1.10}$$

(1.10)与文献[4]的结果是类似的,区别在于前者可以给出$n=0$时的自发辐射几率。

假定在考察的初始t时刻原子与场没有关联,总密度算符$\rho(t)$是场密度算符$\rho_f(t)$与原子密度算符$\rho_a(t)$的直乘,即

$$\rho(t)=\rho_f(t)\otimes\rho_a(t)。 \tag{1.11}$$

其矩阵元为

$$\langle n\alpha|\rho(t)|n'\alpha'\rangle=\langle n|\rho_f(t)|n'\rangle\langle\alpha|\rho_a(t)|\alpha'\rangle。 \tag{1.12}$$

原子和场从t时刻起相互作用τ时间后,总密度算符演化为

$$\rho(t+\tau)=U(\tau)\rho(t)U^{-1}(\tau)。 \tag{1.13}$$

而此刻场密度算符是总密度算符对原子状态的求迹,即

$$\rho_f(t+\tau)=Tr_\alpha\{\rho(t+\tau)\}。 \tag{1.14}$$

对(1.14)两边求光子数态的矩阵元,并利用(1.13)、(1.11)及完备性关系式

$$\sum_{n,\alpha}|n\alpha\rangle\langle n\alpha|=1,$$

再注意到(1.12),整理后得到

$$\langle n|\rho_f(t+\tau)|n'\rangle=\sum_{k,k'}\langle nn'|G(\tau)|KK'\rangle\langle K|\rho_f(t)|k'\rangle, \tag{1.15}$$

式中

$$\langle nn'|G(\tau)|kk'\rangle\equiv\sum_{\alpha,\alpha',\alpha''}\langle n\alpha''|U(\tau)|K\alpha\rangle\langle K'\alpha'|U^{-1}(\tau)|n'\alpha''\rangle\times P_{\alpha\alpha'}, \tag{1.16}$$

这里$|K\rangle$代表光子数态(等效于$|n\rangle$),而

$$P_{\alpha\alpha'}\equiv\langle\alpha|\rho_a(t)|\alpha'\rangle \tag{1.17}$$

是t时刻原子密度算符的矩阵元。

对于任意的原子和场的初态,利用(1.9)、(1.16)及(1.15)可以求出

$$\begin{aligned}&\langle n|\rho_f(t+\tau)|n'\rangle\\&=P_{bb}[b_nb^*_{n'}\langle n+1|\rho_f(t)|n'+1\rangle\\&\quad+c_{n-1}c^*_{n'-1}\langle n|\rho_f(t)|n'\rangle]\\&\quad+P_{ab}[b_na^*_{n'}\langle n+1|\rho_f(t)|n'\rangle\\&\quad+c_{n-1}b^*_{n'-1}\langle n|\rho_f(t)|n'-1\rangle]\\&\quad+P_{ba}[a_nb^*_{n'}\langle n|\rho_f(t)|n'+1\rangle\\&\quad+b_{n-1}c^*_{n'-1}\langle n-1|\rho_t(t)|n'\rangle]\\&\quad+P_{aa}[a_na^*_{n'}\langle n|\rho_f(t)|n'\rangle\\&\quad+b_{n-1}b^*_{n'-1}\langle n-1|\rho_f(t)|n'-1\rangle]。\end{aligned}\tag{1.18}$$

这就是一个原子与场相互作用 τ 时间所引起的场密度算符矩阵元的时间演化，它与文献[4]的区别仍在于包含了自发辐射。

二、单模激光光子几率的运动方程

如果初始时刻原子处于 a 态，即

$$P_{aa}=1,\ P_{bb}=0 \tag{2.1a}$$

$$P_{ab}=P_{ba}=0, \tag{2.1b}$$

而初始场密度算符是对角的，即

$$\langle n|\rho_f(t)|n'\rangle=P_n(t)\delta_{nn'}。\tag{2.1c}$$

在(2.1)的初始条件下，(1.18)约化为

$$P_n(t+\tau)=P_n(t)+B_{n-1}P_{n-1}(t)-B_nP_n(t)。\tag{2.2}$$

在自发辐射率较小的情况下，场密度算符的粗粒时间变率[1]给出

$$\dot{P}_n(t)=r_a[P_n(t+\tau)-P_n(t)], \tag{2.3}$$

式中 r_a 是高能态原子注入速率。由(2.2)和(2.3)立即得到

$$\dot{P}_n(t)=r_aB_{n-1}P_{n-1}(t)-r_aB_nP_n(t)。\tag{2.4}$$

(2.4)确定了光子几率由于增益作用而引起的时间演变。为了对增益作进一步说明，将(1.10)的B_n(在共振情况下)展开，求得

$$r_aB_n=A(n+1)+\text{高价项}, \tag{2.5}$$

式中

$$A=r_a\tau^2g^2 \tag{2.6}$$

正是熟知的线性增益系数。显然 B_n 的出现使光子几率运动方程 (2.4) 不但包含了线性增益，还计及了(2.5)右边高价项所对应的非线性增益。通常所谓的增益饱和自然隐含在非线性增益之中。

腔模损耗对光子几率的影响可以用初始处在低能态的原子束的行为加以模拟[1]。具体讲，从(1.18)出发而利用 $P_{bb}=1$，$P_{aa}=0$ 及 (2.1b)、(2.1c) 的初始条件，仿照得到(2.4)的过程，在线性近似下可以推出

$$\dot{P}_n(t)=r_bC_nP_{n+1}(t)-r_bC_{n-1}P_n(t), \tag{2.7}$$

式中

$$C_n=\tau_c^2g_c^2(n+1) \tag{2.8}$$

应该注意，(2.7)及(2.8)中的 r_b 以及 τ_c、g_c 并非真实的物理量，而是腔模损耗的模拟量，而

$$C=r_b\tau_c^2g_c^2 \tag{2.9}$$

则是熟知的线性损耗系数。

(2.4)与(2.7)分别代表增益和损耗对光子几率时间演化的贡献，将它们的右端加起来得到

$$\begin{aligned}\dot{P}_n(t)=&r_aB_{n-1}P_{n-1}(t)-r_aB_nP_n(t)\\&+r_bC_nP_{n+1}(t)\\&-r_bC_{n-1}P_n(t)。\end{aligned}\tag{2.10}$$

(2.10)就是我们所得到的单模激光光子几率的运动方程。与通常的形式[1,5]相比，它考虑了线性及非线性增益的共同影响，而且适用于共振和非共振两种情况。

三、单模激光的光子反聚束

激光系统稳态运转(即 $\dot{P}_n(t)=0$) 的充分条件是细致平衡，即相邻光子数态之间的几率流精确为零。例如在$|n\rangle$态和$|n-1\rangle$态之间，由(2.10)右边得出

$$r_aB_{n-1}P_{n-1}-r_bC_{n-1}P_n=0。\tag{3.1}$$

利用$|n+1\rangle$态与$|n\rangle$态之间几率流为零也可以写出等价的方程。任一方程都可以给出下面的递推关系

$$P_n=\frac{r_a}{r_b}\frac{B_{n-1}}{C_{n-1}}P_{n-1} \qquad (3.2)$$

由(3.2)容易推出

$$P_n=P_0\prod_{k=1}^{n}\frac{r_a}{r_b}\frac{B_{k-1}}{C_{k-1}} \qquad (3.3a)$$

式中

$$P_0=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{r_a}{r_b}\frac{B_{k-1}}{C_{k-1}}\right)^{-1} \qquad (3.3b)$$

是归一化常数，它的给出利用了几率守恒

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1。$$

(3.3)即为本文的基本结果。

下面讨论共振情况，这时(3.3)约化为

$$P_n=P_0\sum_{k=1}^{n}\frac{R\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{R}}\,x\right)}{k}, \qquad (3.4a)$$

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{R\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{R}}\,x\right)}{k}\right]^{-1}, \qquad (3.4b)$$

式中

$$x=\sqrt{\frac{A}{C}}, \qquad (3.5a)$$

$$R=\frac{r_a}{C}。 \qquad (3.5b)$$

如果将(3.4a)中的正弦平方因子展开取前两项，可得

$$P_n=P_0\prod_{k=1}^{n}\frac{A-Bk}{C}, \qquad (3.6)$$

式中

$$B=\frac{1}{3}\tau gA \qquad (3.7)$$

是熟知的自饱和系数。(3.6)与通常量子理论的结果[1]相一致。

为便于同实验参数相联，(3.5)可以改写为

$$x=\sqrt{r_a\tau_p\tau g}, \qquad (3.8a)$$

$$R=r_a\tau_p, \qquad (3.8b)$$

式中 $\tau_p=\frac{1}{C}$ 可以同谐振腔的参数相联系[6]。

利用(3.4)作出归一化的二阶矩 $Q=[\langle(\Delta n)^2\rangle-\langle n\rangle]/\langle n\rangle$ 随 x 变化的曲线，如图1所示，其中参数 $R=4.736$ 来自文献[7]的实验。

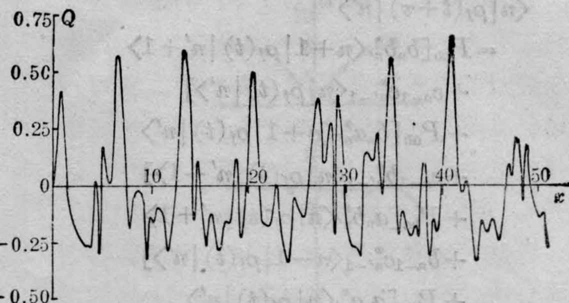

图1 归一化二阶矩 Q 随参量 x 的变化

参数 $R=4.736$, $Q<0$ 对应亚泊松分布

可以看出，随着参量 x 的变化，Q 在零上、下无规振荡，即光子几率 P_n 在超泊松分布和亚泊松分布之间无规变化，显然这是由于因子 $\sin^2\left(\sqrt{\frac{K}{R}}\,x\right)$ 的作用。如果将

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{K}{R}}\,x\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2\sqrt{\frac{K}{R}}\,x\right)\right]$$

的高频振荡项略去，即用平均值 $\frac{1}{2}$ 取代 $\sin^2\left(\sqrt{\frac{K}{R}}\,x\right)$，则(3.4a)化成下面的泊松分布

$$P_n=e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}, \qquad (3.9)$$

其中平均光子数

$$\langle n\rangle=\frac{R}{2}=\frac{r_a\tau_p}{2}。 \qquad (3.10)$$

这与已知的结果[7]是相同的。

至此我们得到关于激光光子统计的新结论：在一般情况下单模激光并不产生相干辐射(指泊松光子统计)。传统所谓的场的相干性实际上是非相干性平均的结果，正是这个平均掩盖了辐射与物质相互作用的量子细节，如果能从实验上展示这样的量子细节，就可以观察到激光的反聚束效应。

四、观察激光反聚束的实验设想

为了从实验上观察激光反聚束，我们有

以下设想。

1．采用碱金属原子束(如 Cs, Rb等)作为工作物质。这是因为碱金属原子谱线数据比较丰富，而利用原子束可以消除多普勒效应。从技术上讲，碱金属原子束的产生和控制技术已经比较成熟。

2．利用 Rydberg 态的跃迁获得单模场。这是因为：第一，Rydberg 原子的偶极矩阵元非常大，原子与场的相互作用很强；第二，相邻能级的跃迁如 $ns\rightarrow(n-1)P$ 处在毫米波甚至微波范围，这就允许谐振腔可以做得足够长以提供相当长的相互作用时间 τ；第三，Rydberg 原子的自发辐射寿命 τ_A 比较长，这就允许 τ 可以比较大。因为高能态原子与场的相互作用时间受到 τ_A 的限制，即 $\tau\leqslant\tau_A$；第四，可以从实验上获得非常小的高能态原子注入速率 r_a(与通常的 r_a 相比较)，允许产生反聚束效应的泵浦参量 x 可以在若干个较宽的区域内调节，容易满足实验参数匹配条件。

3．直接测量毫米波或微波的光子统计是很困难的，但可以在谐振腔后面安置场——离子探测设备(或用其他方法)，探测从腔中出射的原子，从中可能获得光子统计的信息。

感谢张纪岳教授的指导及邵成辉先生的帮助。

参 考 文 献

1 Sargent M III *et al.* 激光物理学，北京：科学出版社，1982：337～350
2 顾樵。in "Second International Conference, Trends in Quantum Electronics", ed. Boehum S M, Eupopean Physical Society, 1985: 359
3 Louisell W H. 辐射的量子统计性质，北京：科学出版社，1982：380
4 Jaynes E T *et al. Proc. IEEE*, 1963; **51** (1): 89
5 Loudon R. x"The quantum theory of light", Clarendon Press, Oxford, 1978: 248
6 顾樵。中国激光，1986; **13**(2): 119
7 Meschede D *et al. Phys. Rev. Lett.*, 1985; **54** (6): 551

(上接第 472 页)

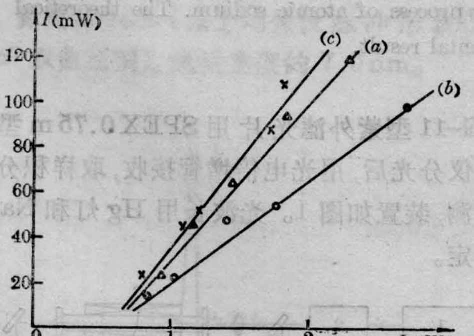

图 4　η 值不同时染料激光输出功率与泵浦绿光功率的关系
(对应于(a)、(b)、(c) η 值分别为 2.5、1.7、1.2)

不同，从而获得黄绿光比例不同的光束；另一种方式是前面介绍的改变 Δt_t。

染料激光波长为 575.5 nm，我们对三种不同的 η 的泵浦光作了染料激光器的输入绿光功率与输出功率的特性曲线，结果示于图 4。其中(a)、(b)曲线对应前一种变 η 方式，此时放大器处于最佳延时。(c) 曲线对应于后一种变 η 方式，此时 Δt_t 较大。

比较(a)、(b)两种情况，非常明显，$\eta=2.5$ 情况下染料激光的输出功率约比 $\eta=1.7$ 情况下的高 50%，因为 η 越小，泵浦光里混的黄光越多，对染料的增益的损耗越大，结果染料激光输出越小。

但是，在(c)的情况下，$\eta=1.2$，可是染料激光的效率反而比 $\eta=2.5$ 的更高，原因在于：虽然泵浦光里含的黄光多了，但是由于 Δt_t 改变而造成黄光脉冲显著落后于绿光脉冲(当 $\Delta t\sim8$ ns)，当黄光脉冲注入到染料池时，染料激光已有很强的输出，故黄光对染料反转布居数的消耗作用明显减小。

参 考 文 献

1 梁培辉 *et al.* 中国激光，1987; 14: 45
2 应锡雄 *et al.* 光学学报，1986; **6**: 870