中国激光
第15卷 第8期

激光器与双稳系统中失谐高斯腔模的稳定性分析

林 圣 路

（山东师范大学物理系）

提要：用解析的及数值的方法讨论了均匀展宽的二能级原子系统失谐高斯激光腔模定态的稳定性。在平均场极限与优质腔近似下，给出了FRL的本征值表达式，确定了失稳范围；对OBS求得本征值所满足的方程和光学双稳条件。

Stability analysis of detuned modes with Gaussian transverse profile in lasers and OBS

Lin Shenlu

(Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan)

Abstract: We studied analytically and numerrically the stability of the stationary detuned modes with Gaussian transverse profile in a ring cavity containing homogeneously broadened two-level atoms. Using the mean-field and good cavity approximations, we found out unstable domain. In OBS case, we obtained conditions of optical bistability and a quadratic equation which is satisfied by the eigenvalues.

一、引言

涉及高斯激光腔模稳定性分析，过去大都采用精确谐振的假设[1]。考虑到腔的传输效应和介质的色散性质，失谐是相当普遍的，尤其是在OBS中。最近，讨论失谐的文章[2,3]指出：FRL在腔的衰减常数 $\bar{K}>5$（劣质腔条件）和 $\Delta\neq 0$ 时，如果泵浦参数 C 足够大（即透射场 x^2 足够大），增益 G 必小于1，非零定态是稳定的。这个结论是从数值模拟方法得到的，因而无法分析失谐参数的影响。本文所讨论的则是 $K\ll\gamma_\perp+\gamma_\parallel$（优质腔近似）的情况。采用适当简化模型，对失稳问题重新进行解析的和数值的分析。不仅验证了已有的某些重要论断，而且给出了新的结果。

二、基本模型和定态解

考虑装有均匀展宽二能级原子样品的环形腔，腔的总长度为 $\mathscr{L}$，其中可饱和的柱状样品长度为 L，截面积为 πd^2。以 K、$\gamma_\parallel$ 和 $\gamma_\perp$ 分别表示腔的衰减常数（即空腔线宽）、原子的纵向及横向衰减率。此环形腔结构如图1所示。球面镜3和4的反射率接近100%，反射镜1、2的透射系数为 T（反射系数为 R）。

输入一单色光，其电场慢变包络为 E_I，频率 ω_0，相应于空腔的 TEM_{00} 模。E_T 为输

收稿日期：1987年1月9日。

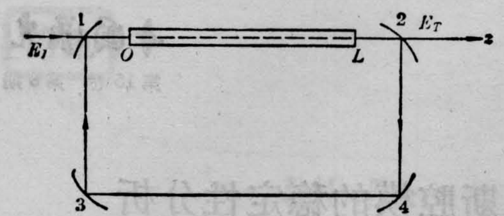

图1　环形腔光学系统

出电场。引入无量纲归一化电场振幅（慢变包络）：

$$f=\frac{\mu E}{\hbar\sqrt{\gamma_\perp\gamma_\parallel}}(\mu\text{ 为原子偶极矩的模})$$

则归一化的入射及透射场振幅分别应取为：

$$y=\frac{\mu E_I}{\hbar\sqrt{\gamma_\perp\gamma_\parallel T}}\qquad x_0=\frac{\mu E_T}{\hbar\sqrt{\gamma_\perp\gamma_\parallel T}}$$

设样品的横截面尺度 d 远大于高斯束腰 W_0，则费涅耳数 $\pi W_0^2/\lambda_0 L\gg 1$，其中 λ_0 为径向波长。此模型的 Maxwell-Bloch 方程是：

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}+\frac{1}{C}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=\alpha\sigma\int_0^\infty dr\,\frac{4r}{W_0^2}\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right)P(r,z,t)\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial P(r,z,t)}{\partial t}=\gamma_\perp\left[D(r,z,t)f(z,t)\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right)-P(r,z,t)(1+i\Delta)\right]\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial D(r,z,t)}{\partial t}=-\gamma_\parallel\left\{\frac{1}{2}\left[P^*(r,z,t)f(z,t)+f^*(z,t)P(r,z,t)\right]\times\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right)+D(r,z,t)-1\right\}\tag{1.3}$$

式中 $f(r,z,t)=f(z,t)\exp(-r^2/W_0^2)$ 是电场振幅，$P(r,z,t)$ 是归一化的原子宏观极化；$D(r,z,t)$ 是归一化的激光上、下能级布居数之差；α 是单位长度样品的不饱和吸收系数；σ 是由于泵浦产生的每原子的布居数反转；$\Delta=\dfrac{\omega_A-\omega_0}{\gamma_\perp}$ 则是原子的失谐参数。ω_A 是原子的跃迁频率，ω_0 在 OBS 和 LIS 中为输入光频率，在 FRL 中是非零定态激光频率。f^* 及 P^* 是 f 和 P 的复共轭，分别满足(1.1)和(1.2)的共轭方程。

方程(1)相应的边界条件为：

$$f(0,t)=Ty+(1-T)e^{-i\delta_0}f\left(L,\ t-\frac{\mathscr{L}-L}{c}\right)\tag{2}$$

式中 $\delta_0=\dfrac{\mathscr{L}}{c}(\omega_c-\omega_0)$ 表示腔对 TEM_{00} 模的失配参数；ω_c 为最接近 ω_0 的腔频。若以空腔线宽 $K=\dfrac{cT}{\mathscr{L}}$ 为单位表示，有：

$$\theta=\frac{\omega_c-\omega_0}{K}=\frac{\delta_0}{T}\tag{3}$$

取平均场极限：

$$\alpha\sigma L\to 0,\ T\to 0(\text{即 } R\to 1),\ \delta_0\to 0$$
$$\frac{\alpha\sigma L}{2T}=C(\text{任意常数}),\ \frac{\delta_0}{T}=\theta(\text{任意常数})\tag{4}$$

假定腔的渡越时间远大于原子的弛豫时间，即 $\dfrac{\mathscr{L}}{c}\gg T_1=\dfrac{1}{\gamma_\perp}$，$\dfrac{\mathscr{L}}{c}\gg T_2=\dfrac{1}{\gamma_\parallel}$。因而

$$K=\frac{cT}{\mathscr{L}}\ll\frac{c}{\mathscr{L}}\ll\gamma_\perp+\gamma_\parallel\tag{5}$$

引进新的时空坐标：

$$z'=z,\ t'=t+\frac{\mathscr{L}-L}{c}\cdot\frac{z'}{L}\tag{6}$$

和变换式：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z',t')&=Tyz'/L+f(z',t')a^{z'/L}\\ \tilde{P}(r,z',t')&=P(r,z',t')a^{z'/L}\\ \tilde{D}(r,z',t')&=D(r,z',t')R^{2z'/L}\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $a=Re^{-i\delta_0}$。变换后的 M-B 方程是：

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z'}+\frac{\mathscr{L}}{cL}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t'}=\frac{\tilde{f}}{L}(\ln|R|-i\delta_0)+\frac{Ty}{L}+\alpha\sigma\int_0^\infty dr\,\frac{4r}{W_0^2}\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right)\tilde{P}\tag{8.1}$$

$$\frac{\partial\tilde{P}}{\partial t'}=\gamma_\perp\left[\tilde{D}\tilde{f}\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right)-\tilde{P}(1+i\Delta)\right]\tag{8.2}$$

$$\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial t'}=-\gamma_{/\!/}\Big[\frac{1}{2}(\widetilde{f}\widetilde{P}^*+\widetilde{f}^*\widetilde{P})\times\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)+\widetilde{D}-1\Big] \quad (8.3)$$

电场边界条件变成无延迟的周期性边界条件

$$\widetilde{f}(0,\ t')=\widetilde{f}(L,\ t') \quad (9)$$

定态条件为 $\frac{\partial \widetilde{P}_{st}}{\partial t'}=0$, $\frac{\partial \widetilde{D}_{st}}{\partial t'}=0$, $\frac{\partial \widetilde{f}_{st}}{\partial t'}=0$, 在平均场极限下, 又有 $\frac{\partial \widetilde{f}_{st}}{\partial z'}=0$。由(8)容易解得定态量:

$$\widetilde{D}_{st}=\frac{1+\Delta^2}{1+\Delta^2+|\widetilde{E}|^2},$$

$$\widetilde{P}_{st}=\frac{(1-i\Delta)\widetilde{f}_{st}}{1+\Delta^2+|\widetilde{E}|^2}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big),$$

$$\widetilde{P}^*_{st}=\frac{(1+i\Delta)\widetilde{f}^*_{st}}{1+\Delta^2+|\widetilde{E}|^2}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)$$

$$y=\widetilde{f}_{st}\Big[\Big(1+\frac{2C}{x^2}g(x)\Big)+i\Big(\theta-\frac{2C\Delta}{x^2}g(x)\Big)\Big] \quad (10)$$

式中 $g(x)=\ln\Big(1+\frac{x^2}{1+\Delta^2}\Big)$,

$$\widetilde{E}=\widetilde{f}_{st}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big),$$

定态电场振幅 $\widetilde{f}_{st}=\widetilde{f}(L)=f(L)=x_c$, 而 $x=|\widetilde{f}_{st}|=|x_c|$ 为透射场的模。不失一般性, 可取输入电场 y 为实。则

$$y^2=x^2\Big[\Big(1+\frac{2C}{x^2}g(x)\Big)^2+\Big(\theta-\frac{2C\Delta}{x^2}g(x)\Big)^2\Big] \quad (11)$$

这就是光学双稳系统中的定态方程。

对 FRL, $y=0$, $\sigma>0$, 于是

$$\Big(1-\frac{2C}{x^2}g(x)\Big)^2+\Big(\theta+\frac{2C\Delta}{x^2}g(x)\Big)^2=0$$

由此可得两式, 即 $\Delta=-\theta$ 及

$$2C=\frac{x^2}{\ln\Big(1+\frac{x^2}{1+\Delta^2}\Big)} \quad (12)$$

据 Δ 和 θ 的定义, 前一式可化为

$$\omega_0=\frac{K\omega_A+\gamma_\perp\omega_c}{K+\gamma_\perp} \quad (13)$$

(12)式是激光定态方程, (13)式为拉模公式。

三、线性稳定性分析

定义由于腔内电场涨落而产生的下列偏离量:

$$\delta\widetilde{f}(z',\ t')=\widetilde{f}(z',\ t')-\widetilde{f}_{st}(z')$$
$$\delta\widetilde{P}(r,\ z',\ t')=\widetilde{P}(r,\ z',\ t')-\widetilde{P}_{st}(r,\ z')$$
$$\delta\widetilde{D}(r,\ z',\ t')=\widetilde{D}(r,\ z',\ t')-\widetilde{D}_{st}(r,\ z')$$
$$\delta\widetilde{f}^*(z',\ t')=\widetilde{f}^*(z',\ t')-\widetilde{f}^*_{st}(z')$$
$$\delta\widetilde{P}^*(r,\ z',\ t')=\widetilde{P}^*(r,\ z',\ t')-\widetilde{P}^*_{st}(r,z') \quad (14)$$

这些偏离量中, $\delta\widetilde{f}$、$\delta\widetilde{f}^*$ 满足类似于(9)的周期性边界条件。把所有偏离量作如下模展开:

$$\begin{pmatrix}\delta\widetilde{f}_n(z',\ t')\\ \delta\widetilde{P}_n(r,\ z',\ t')\\ \delta\widetilde{D}_n(r,\ z',\ t')\\ \delta\widetilde{f}^*_n(z',\ t')\\ \delta\widetilde{P}^*_n(r,\ z',\ t')\end{pmatrix}=\sum_n e^{iK_nz'}e^{\lambda t'}\begin{pmatrix}\delta f_n\\ \delta P_n(r)\\ \delta D_n(r)\\ \delta f^*_n\\ \delta P^*_n(r)\end{pmatrix} \quad (15)$$

$K_n=\frac{2n\pi}{L}$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$) 表示第 n 个腔纵模, λ 为本征值。

把(14)、(15)代入(8), 考虑到 $e^{iK_nz'}$ 在 $z'=0$ 至 L 间的正交性及 $\widetilde{D}$ 为实数, 略去 $\delta f^*\delta P$、$\delta D\delta f$ 等非线性项, 并将腔纵模改记为 $\alpha_n=\frac{K_ncL}{\mathscr{L}}=\frac{2n\pi c}{\mathscr{L}}$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$), 则可得到第 n 模的线性化本征方程:

$$\lambda\delta f=[-i(\alpha_n+K\theta)-K]\delta f+K2C\int_0^\infty dr\ \frac{4r}{W_0^2}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)\delta P \quad (16.1)$$

$$\lambda\delta f^*=[-i(\alpha_n-K\theta)-K]\delta f^*+K2C\int_0^\infty dr\ \frac{4r}{W_0^2}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)\delta P^* \quad (16.2)$$

$$\lambda\delta P=\gamma_{\perp}\Big[(\tilde{D}_{st}\delta f+\tilde{f}_{st}\delta D)\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)-\delta P(1+i\Delta)\Big] \tag{16.3}$$

$$\lambda\delta P^*=\gamma_{\perp}\Big[(\tilde{D}_{st}\delta f^*+\tilde{f}^*_{st}\delta D)\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)-\delta P^*(1-i\Delta)\Big] \tag{16.4}$$

$$\lambda\delta D=-\gamma_{\parallel}\Big[\frac{1}{2}(\tilde{f}_{st}\delta P^*+\tilde{f}^*_{st}\delta P+\tilde{P}_{st}\delta f^*+\tilde{P}^*_{st}\delta f)\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)+\delta D\Big] \tag{16.5}$$

这里，将 δf_n, δP_n, …简记为 δf, δP 等。

这个耦合方程组可用代数方法求解，结果是：

$$\tilde{\lambda}=-i\tilde{\alpha}_n-\tilde{K}\Big[1-\frac{2C}{x^2}A'(\Delta,\tilde{\lambda},x^2)\pm U^{1/2}(\theta,\Delta,\tilde{\lambda},x^2)\Big] \tag{17}$$

其中

$$A'=\frac{\tilde{\lambda}+\frac{1}{2}}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+1)}(1+\Delta^2)\ln\Big(1+\frac{x^2}{1+\Delta^2}\Big)-\frac{1}{2}\Big[1+\frac{1+\Delta^2}{\tilde{\lambda}}+\frac{\Delta^2}{\tilde{\lambda}+1}\Big]\times\ln\Big[1+\frac{x^2}{(\tilde{\lambda}+1)^2+\Delta^2}\Big]$$

$$U=U_1U_2=(D_1+iD_2)(D_3+iD_4)$$

$$U_1=\frac{2C}{x^2}\Big\{\frac{[(\tilde{\lambda}+1)^2+\Delta^2](1+\Delta^2)^{1/2}+\Delta(\tilde{\lambda}^2-1-\Delta^2)}{2\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+1)}\times\ln\Big[1+\frac{x^2}{(\tilde{\lambda}+1)^2+\Delta^2}\Big]-\frac{(1+\Delta^2)[(1+\Delta^2)^{1/2}-\Delta]}{2\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+1)}\times\ln\Big(1+\frac{x^2}{1+\Delta^2}\Big)\Big\}+\theta$$

$$U_2=\frac{2C}{x^2}\Big\{\frac{(1+\Delta^2)^{1/2}}{2\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}+1)-\frac{\Delta(\tilde{\lambda}-1)}{2\tilde{\lambda}}+\frac{\Delta^2[(1+\Delta^2)^{1/2}+\Delta]}{2\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+1)}\Big\}\times\ln\Big[1+\frac{x^2}{(\tilde{\lambda}+1)^2+\Delta^2}\Big]-\frac{2C}{x^2}\frac{(1+\Delta^2)[(1+\Delta^2)^{1/2}+\Delta]}{2\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+1)}\times\ln\Big(1+\frac{x^2}{1+\Delta^2}\Big)-\theta$$

作微扰迭代，取 $\tilde{\lambda}=-i\tilde{\alpha}_n$ 代入 A' 和 $U^{1/2}$ 中并略去 $O(\tilde{K}^2)$ 项，得一级近似结果。分离出 $\tilde{\lambda}$ 的实部：

$$\mathrm{Re}\tilde{\lambda}=-\tilde{K}\Big\{1-\frac{1+\Delta^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\tilde{\alpha}_n^2}+\frac{2C}{x^2}\Big[\frac{1}{2}\Big(1+\frac{\Delta^2}{1+\tilde{\alpha}_n^2}\Big)H_1-\frac{1}{2}\Big(\frac{1+\Delta^2}{\tilde{\alpha}_n}+\frac{\tilde{\alpha}_n\Delta^2}{1+\tilde{\alpha}_n^2}\Big)H_2\Big]\pm\frac{2C}{x^2}\Big[\frac{1}{2}(D_1^2+D_2^2)^{1/2}(D_3^2+D_4^2)^{1/2}+\frac{1}{2}(D_1D_3-D_2D_4)\Big]^{1/2}\Big\} \tag{18}$$

其中，

$$D_1=\Big[\frac{\Delta'}{2}-\frac{\Delta^2\Delta''}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_1-\Big[\frac{\Delta''}{2\tilde{\alpha}_n}+\frac{\Delta^2\Delta''}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_2+\frac{(1+\Delta^2)\Delta''}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}g(x)+\theta g(x)$$

$$D_2=\Big[\frac{\Delta''}{2\tilde{\alpha}_n}+\frac{\Delta^2\Delta''}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_1+\Big[\frac{\Delta'}{2}-\frac{\Delta^2\Delta''}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_2-\frac{(1+\Delta^2)\Delta''}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}g(x)$$

$$D_3=\Big[\frac{\Delta''}{2}-\frac{\Delta^2\Delta'}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_1-\Big[\frac{\Delta'}{2\tilde{\alpha}_n}+\frac{\Delta^2\Delta'}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_2+\frac{(1+\Delta^2)\Delta'}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}g(x)-\theta g(x)$$

$$D_4=\Big[\frac{\Delta'}{2\tilde{\alpha}_n}+\frac{\Delta^2\Delta'}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_1+\Big[\frac{\Delta''}{2}-\frac{\Delta^2\Delta'}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}\Big]H_2$$

$$-\frac{(1+\Delta^2)\Delta'}{2\tilde{\alpha}_n(1+\tilde{\alpha}_n^2)}g(x)$$

$$\Delta'=(1+\Delta^2)^{1/2}+\Delta,\ \Delta''=(1+\Delta^2)^{1/2}-\Delta$$

$$H_1=\frac{1}{2}[h_1(x^2)-h_1(0)],$$

$$h_1(x^2)=\ln[(1-\tilde{\alpha}_n^2+\Delta^2+x^2)^2+4\tilde{\alpha}_n^2]$$

$$H_2=-[h_2(x^2)-h_2(0)],$$

$$h_2(x^2)=\tan^{-1}\frac{2\tilde{\alpha}_n}{1-\tilde{\alpha}_n^2+\Delta^2+x^2}$$

上述带“~”号各量是相对于 $\gamma_\perp$ 的比率重新标度的，即取 $\tilde{\alpha}_n=\frac{\alpha_n}{\gamma_\perp}$，$\tilde{K}=\frac{K}{\gamma_\perp}$，$\tilde{\lambda}=\frac{\lambda}{\gamma_\perp}$。计算中，已令 $\tilde{\gamma}=\frac{\gamma_{/\!/}}{\gamma_\perp}=1$。

定态失稳条件为 $\mathrm{Re}\tilde{\lambda}>0$（即增益 $G>1$），失稳区域由方程 $\mathrm{Re}\tilde{\lambda}=0$，即由方程

$$f^{\pm}(\theta,\ \Delta,\ \tilde{\alpha}_n,\ x^2)$$
$$=1-\frac{1+\Delta^2}{2(1+\tilde{\alpha}_n^2)}$$
$$+\frac{2C}{x^2}\Big[\frac{1}{2}\Big(1+\frac{\Delta^2}{1+\tilde{\alpha}_n^2}\Big)H_1$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{1+\Delta^2}{\tilde{\alpha}_n}+\frac{\tilde{\alpha}_n\Delta^2}{1+\tilde{\alpha}_n^2}\Big)H_2\Big]$$
$$\pm\frac{2C}{x^2}\Big\{\frac{1}{2}[(D_1^2+D_2^2)(D_3^2+D_4^2)]^{1/2}$$
$$+\frac{1}{2}(D_1D_3-D_2D_4)\Big\}^{1/2}=0 \quad (19)$$

确定。取 $\theta=-\eta\Delta$（η 为正比例常数），对一定的 η 值，在参数平面 $\tilde{\alpha}_n-\Delta$ 上，$f^{\pm}=0$ 曲线关于 $\tilde{\alpha}_n$ 轴和 Δ 轴对称，又因 $f^+\geqslant f^-$，所以只需对 $\tilde{\alpha}_n\geqslant0$ 和 $\Delta\geqslant0$ 给出 $f^-=0$ 曲线便可确定最大失稳区域边界。边界两侧，$f^->0$ 部分是定态稳定的，而 $f^-<0$ 部分对应定态失稳。

计算机数值模拟时，可以选定 η，对给定的 Δ 值，在 $\tilde{\alpha}_n—x^2$ 平面上得到失稳范围。

图 2 和图 3 分别绘出 $\eta=1$(FRL) 情况下，$\Delta=1$ 和 $\Delta=2$ 时 $f^-=0$ 曲线，曲线与纵轴 $\tilde{\alpha}_n$ 包围的区域是 $f^-<0$（定态失稳）的。这与文献[3]的结果明显不同。

失稳区域的大小随 Δ 的变化十分敏感：

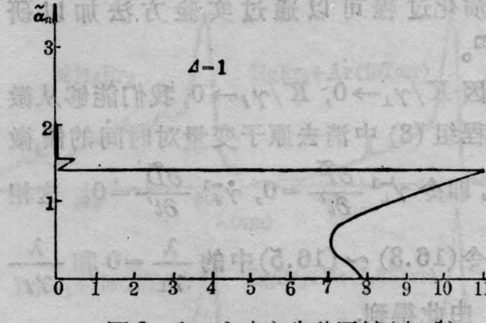

图 2 $f^-=0$ 确定失稳区域（$\Delta=1$）

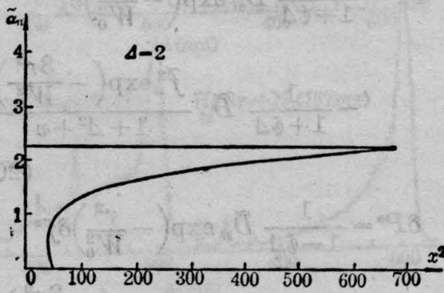

图 3 $f^-=0$ 曲线确定失稳区域（$\Delta=2$）

当 $\Delta=0$ 时，相应于基模 TEM_{00} 的所有纵模都是定态稳定的。这证实了已有的结论[1,2]。

当 $\Delta=1$ 时，达到稳定定态，要求 $x^2\geqslant11.08$。

当 $\Delta=2$ 时，非零稳定定态只存在于 $x^2\geqslant680$ 的区域中。

数值计算还表明，当 $\Delta=3$ 时，$x^2\geqslant1.3\times10^5$ 处才出现稳定定态。如果失谐参数 Δ 增大到 5，需要 $x^2\geqslant10^{12}$，才有 $f^-\geqslant0$。可见，要想达到稳定定态几乎已不可能。

失稳区域还与 θ（即与 η）取值有关。对于一般的 η 值，我们通过数值计算得出区域变化趋向：相同的 Δ 值，与 $\eta=1$ 情况相比，当 $\eta>1$ 时，失稳区域缩小；而 $\eta<1$ 时，失稳区域扩大。

四、CBS 的稳定性分析，绝热消去法

假定初始偏离来源于输入场的涨落。定

态的演化过程可以通过实验方法加以研究[5,6]。

因 $K/\gamma_\perp\to 0$, $K/\gamma_/\!\!/\to 0$, 我们能够从微分方程组(8)中消去原子变量对时间的偏微商项, 即令 $\gamma_\perp^{-1}\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial t'}=0$, $\gamma_/\!\!/^{-1}\frac{\partial\widetilde{D}}{\partial t'}=0$。这相当于令(16.3)～(16.5)中的 $\frac{\lambda}{\gamma_\perp}=0$ 和 $\frac{\lambda}{\gamma_/\!\!/}=0$。由此得到:

$$\delta P=\frac{1}{1+i\Delta}\widetilde{D}_{st}^2\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)\delta f-\frac{1}{1+i\Delta}\widetilde{D}_{st}\frac{\widetilde{\mathcal{F}}_{st}^2\exp\Big(-\frac{3r^2}{W_0^2}\Big)}{1+\Delta^2+v}\delta f^* \tag{20.1}$$

$$\delta P^*=\frac{1}{1-i\Delta}\widetilde{D}_{st}\exp\Big(-\frac{r^2}{W_0^2}\Big)\delta f^*-\frac{1}{1-i\Delta}\widetilde{D}_{st}\frac{\widetilde{\mathcal{F}}_{st}^{*2}\exp\Big(-\frac{3r^2}{W_0^2}\Big)}{1+\Delta^2+v}\delta f \tag{20.2}$$

$v=|\widetilde{E}|^2=x^2\exp\Big(-\frac{2r^2}{W_0^2}\Big)$。代回(16.1)和(16.2)可得到本征值 λ 所满足的代数方程。如取 $W_0\to\infty$, $v=x^2$, 结果求得平面波 OBS 线性化问题本征值 λ 满足,

$$(\lambda+i\alpha_n)^2+2K\Big[1+\frac{2C(1+\Delta^2)}{(1+\Delta^2+x^2)^2}\Big](\lambda+i\alpha_n)+K^2\frac{d(y^2)}{d(x^2)}\Big|_{x_{st}}=0 \tag{21}$$

若取 $\alpha_n=0$, 与已有结果[4]一致。

当电场具有高斯型截面时, λ 由下列方程确定:

$$\Big\{\lambda+i(\alpha_n+K\theta)+K\Big[1+\frac{2C}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+i\Delta}\Big(\frac{1+\Delta^2}{1+\Delta^2+v}\Big)^2dv\Big]\Big\}\delta f-\Big[K\frac{2C}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+i\Delta}\frac{1+\Delta^2}{(1+\Delta^2+v)^2}\times\widetilde{\mathcal{F}}_{st}^2\exp\Big(-\frac{2r^2}{W_0^2}\Big)dv\Big]\delta f^*=0 \tag{22.1}$$

$$\Big\{\lambda+i(\alpha_n-K\theta)+K\Big[1+\frac{2C}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1-i\Delta}\Big(\frac{1+\Delta^2}{1+\Delta^2+v}\Big)^2dv\Big]\Big\}\delta f^*-\Big[K\frac{2C}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1-i\Delta}\cdot\frac{1+\Delta^2}{(1+\Delta^2+v)^2}\times\widetilde{\mathcal{F}}_{st}^{*2}\exp\Big(-\frac{2r^2}{W_0^2}\Big)dv\Big]\delta f=0 \tag{22.2}$$

解得高斯波 OBS 本征值 λ 所满足的二次方程:

$$(\lambda+i\alpha_n)^2+2K\Big(1+\frac{2C}{1+\Delta^2+x^2}\Big)(1+i\alpha_n)+K^2\frac{d(y^2)}{d(x^2)}\Big|_{x_{st}}=0 \tag{23}$$

它与(21)形式类似, 但有明显差异。为便于比较, 取 $\alpha_n=0$。实际上, 在 OBS 中, 这种简化只改变模的脉动行为而不影响稳定性结果。

(1) 当 $x^2\ll 1$ 时, 方程(23)的解是:

$$\lambda=-K\Big(1+\frac{2C}{1+\Delta^2}\Big)\pm i\Big(\theta-\frac{2C\Delta}{1+\Delta^2}\Big) \tag{24}$$

当 $x^2\to\infty$ 时, (23)的解则是:

$$\lambda=-K(1\pm i\theta) \tag{25}$$

这两种极限情况的解, 均与平面波相应解完全相同。两者都说明, 偏离滞后环区域的低透射分支和高透射分支的远端, 定态总是稳定的。

(2) 当 $\theta=-\Delta=0$ 时, (23)的解表为:

$$\lambda_1=-K\Big[1+\frac{2C}{x^2}g_0(x)\Big]=-K\Big(\frac{y}{x}\Big) \tag{26.1}$$

$$\lambda_2=-K\Big[1+\frac{4C}{1+x^2}-\frac{2C}{x^2}g_0(x)\Big]=-K\frac{dy}{dx}\Big|_{x_{st}} \tag{26.2}$$

$g_0(x)=\ln(1+x^2)$。由于方程 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x_{st}}=0$ 没有非零的实数解, 说明定态曲线 y—x 是单调的, 此时不可能有S型的双稳出现。然而, 临界方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 的解是 $x^2=C-1\pm\sqrt{C^2-4C}$。可见高斯波 OBS 的双稳条件是:

(下转第 495 页)

激光光子离解产生 $3P$ 原子。$3P$ 原子还可以由 Raman 效应跃迁到 $4P$ 态[3]，通过这样两个通道维持 $4P_{3/2}$ 的布居。

虽然 $4P_{3/2}$ 布居数的产生有分子过程参与，但本文所观测到的过程，实质上是钠蒸气中原子的四波混频过程 $\omega_{UV}=2\omega_L-\omega_{IR}$，红外光子 $\hbar\omega_{IR}$ 是由 Na 原子 $4P_{3/2}$—$4S_{1/2}$ 受激辐射产生，而混频得到的 $\hbar\omega_{UV}$ 与 Na 原子 $4P_J$—$3S_{1/2}$ 跃迁近共振加强（见公式(2)）。上述过程与[9]报道的分子-原子混合共振过程是不同的。区别之一是原子四波混频过程具有窄的激发谱，而分子-原子混合共振过程则是宽带激发或是多条分子振转谱线激发谱[9]；其次原子过程中相干光子的能量符合能量守恒定律，而分子-原子混合共振过程常需要分子动能的补充，才能符合守恒定律。

原子四波混频过程的光强可由下式给出[4]

$$I_{UV}=\varepsilon_0^2\eta_{UV}\eta_L^2\eta_{IR}\omega_{UV}^2|\chi^{(3)}|^2I_L^2I_{IR}/[g_{IR}^2+4(\Delta k)^2] \tag{1}$$

式中 $\eta=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon}$；$\Delta\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{k}_L-\boldsymbol{k}_{IR}-\boldsymbol{k}_{UV}$ 为波矢失配量；g_{IR} 为红外受激辐射增益系数。

$$\chi^{(3)}=K\frac{N}{\hbar^3}\sum_{ijJ}\frac{\left\{\begin{matrix}\langle 3S|\mu|i\rangle\langle i|\mu|j\rangle\langle j|\mu|4P_J\rangle\\ \langle 4P_J|\mu|3S\rangle\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}(\Omega_i-\omega_L)(\Omega_j-2\omega_L)\\ \times(\Omega_{4P_J}-\omega_{UV})\end{matrix}\right\}} \tag{2}$$

式中 N 是原子密度；$\Omega_i=(E_i-E_{3s})/\hbar-i\Gamma_i$ 为复频率。

相干辐射随温度升高而急剧增加可用公式(1)、(2)加以说明。温度升高，原子密度 N 增多，使非线性极化率增大；同时 Na_2 分子密度亦增多，激发态 Na_2^* 密度随温度按玻尔兹曼分布增多，由 Na_2^* 吸收双光子离解产生 $4P$ 原子增多，使受激辐射 I_{IR} 增加。这二项因素结合起来使相干辐射随温度急剧增加。从公式(1)还可以看出，相干辐射强度除了随入射光强 I_L 平方地增加外，还与受激辐射增益系数 g_{IR} 和强度 I_{IR} 有关，而这二项又均与 I_L 有关，情况比较复杂，但它的增长显然是大于入射光强平方的增长，与实验结果一致。

参考文献

1 Taylor J R. *Opt. Commun.*, 1976; **18**: 504

2 Harting W. *Appl. Phys.*, 1978; **15**:427

3 Chen J K *et al. Appl. Phys., B*, 1984; **33**, 155

4 Zhang P L, Schawlow A L. *Canadian J. Phys*. 1984; **62**: 1187

5 Cotter D *et. al. Opt. Commun.*, 1977; **22**: 190

6 Herzberg G. Molecular Spectra and Molecular Structure I, 2nd ed. D. Van Nostrand, Princeton, 1950

7 Rothe E W *et al. J. Chem. Phys.*, 1980; **72**: 5145

8 Gerber G. Moller. Photodissociation of Na, in Laser Spectroscopy VII, ed. by Hansch T. W, Shen Y. R, Springer-Verlag, Berlin, 1985

9 Dinev S G *et al. Appl. Physd. B*, 1986; **39**: 65

（上接第 454 页）

$$C\geqslant 4，且\ \Delta、\theta\ 不同时为\ 0 \tag{27}$$

而平面波 OBS 的双稳条件仅要求 $C\geqslant4$，即便 $\Delta=0$，$\theta=0$，定态曲线仍然出现明显的多值区（滞后环）。

当然，两者 S 型曲线的负斜率区，相应的定态都是失稳的。

上述差异也说明，如果实现了高斯型的光学双稳，预期它的定态曲线仍比平面波的双稳曲线更为陡峭（上、下分支交迭更小）。

感谢陈继述教授的热情指导和马先、马则一等同志在数值计算工作中给予的支持和帮助。

参考文献

1 Lugiao L A *et al. Opt. Commun.*, 1983; **46**: 57

2 Stere Stuut, Murray Sargrnt III. *J. Opt. Soc. Am.*, 1984; **B1**(1): 45

3 Lugiato L A *et al. Phys. Rev.*, 1984; **A30**: 1366

4 Lugiato L A, Milani M. *J. Opt. Soc. Am.*, 1985; **B2**(1): 18

5 H 哈肯(西德)。协同学，原子不能出版社，1984: 255

6 Bonifacio R, Lugiato L A. *Lettear Al Nuovo Cimento*, 1978; **15**: 510

7 Ligiato L A. Progress in Optics, 1984; XXI: 69