

# 相因子叠加法测量三维位移的误差灵敏度及其可测范围分析

华建文\* 陈明仪

(上海科技大学精密机械工程系)

**提要:** 本文论述相因子叠加法测量三维位移时的误差、灵敏度以及可测范围,并讨论了提高灵敏度的方法。

## Analysis of error sensitivity and range of 3-D displacement vector measurement

Hua Jianwen, Chen Mingyi

(Dept. of Fine Mechanical Engineering, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai)

**Abstract:** Theoretical analysis of error, sensitivity and range of 3-D displacement vector measurement using phase comparison method are described and experimental results are offered. Some proposals for improving sensitivity are discussed.

### 一、引言

相因子叠加法测量刚体三维位移是最近发展起来的一种新方法<sup>[1]</sup>。该方法比用一般全息法测量三维位移简单容易,特别是位移信息读出方便。条纹定域在全息片上,可在白光照明下读数条纹和量取尺寸。而且,对被测物体的形状没有要求,即不管三维物体还是二维物体,形状复杂的还是简单的,透明的还是不透明的,只要有漫散射能力,就可以测量,所以该法具有一定实用价值。

该方法的原理是利用物体位移时在透镜L频谱面上引起的光场附加位相因子的变化,测量该物体的三维位移矢量<sup>[1]</sup>。见图1,设位于透镜前的漫散射体由照明方向矢量为

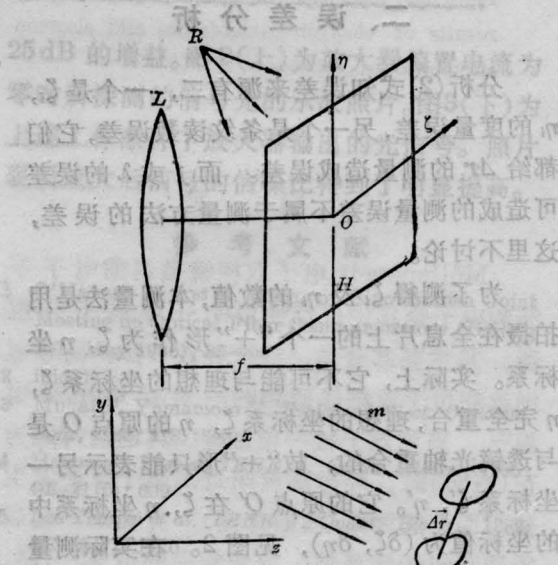


图1 相因子测量法记录系统简图

收稿日期: 1987年2月18日。

\* 现在镇江船舶学院机械工程系工作。

$m$  的平行单色光照明。物体三维位移矢量用  $\Delta r = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  表示。在透镜后焦面上。由物体产生的光场用  $D(\zeta, \eta)$  描述。全息记录底片  $H$  置于后焦面上。此面上的坐标系  $\zeta, \eta$  与坐标  $x, y$  平行, 其原点设置在透镜光轴上。全息片在参考光  $R$  的照明下, 拍一张物体位移前后的二次曝光全息图。则全息片再现时其正一级衍射光在  $H$  平面上的光强

$I \propto K |D(\zeta, \eta)|^2 \{1 + \cos k \Delta r \cdot (l - m)\}$  呈现的条纹与位移量  $\Delta r$  间有下述关系

$$\frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta + \Delta z f}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2 + f^2}} = n\lambda + \Delta r \cdot m \quad (1)$$

在全息片上取 4 个点  $P_i(\zeta_i, \eta_i)$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ), 量出  $\zeta_i$  及  $\eta_i$  的数值及数出  $P_1, P_2$  及  $P_3$  各点与  $P_0$  点之间的条纹数目  $\Delta n_{i0} = n_i - n_0$  ( $i=1, 2, 3$ )。把  $P_i$  点坐标及  $P_0$  点坐标分别代入(1)式, 并相减, 有:

$$\frac{\Delta x \zeta_i + \Delta y \eta_i + \Delta z f}{\sqrt{\zeta_i^2 + \eta_i^2 + f^2}} - \frac{\Delta x \zeta_0 + \Delta y \eta_0 + \Delta z f}{\sqrt{\zeta_0^2 + \eta_0^2 + f^2}} = \Delta n_{i0} \lambda \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

从(2)式可解得  $\Delta r(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 。

## 二、误差分析

分析(2)式知误差来源有二, 一个是  $\zeta_i, \eta_i$  的度量误差, 另一个是条纹读数误差, 它们都给  $\Delta r$  的测量造成误差。而  $f$  或  $\lambda$  的误差可造成的测量误差不属于测量方法的误差, 这里不讨论。

为了测得  $\zeta_i$  及  $\eta_i$  的数值, 本测量法是用拍摄在全息片上的一个“+”形作为  $\zeta, \eta$  坐标系。实际上, 它不可能与理想的坐标系  $\zeta, \eta$  完全重合, 理想的坐标系  $\zeta, \eta$  的原点  $O$  是与透镜光轴重合的, 故“+”形只能表示另一坐标系  $\zeta', \eta'$ 。它的原点  $O'$  在  $\zeta, \eta$  坐标系中的坐标值为  $(\delta\zeta, \delta\eta)$ , 见图 2。在实际测量中只可能量取到  $\zeta'_i$  及  $\eta'_i$  的数值, 由(2)式算得  $\Delta r$  的测量值。而准确值应以  $\zeta'_i + \delta\zeta$  及  $\eta'_i + \delta\eta$  代入(1)式计算得到。条纹读数和

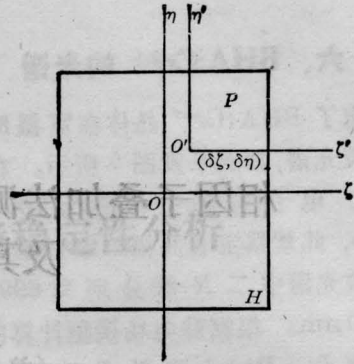


图 2 全息片上实际的坐标系  $\zeta', \eta'$  与理想的坐标系  $\zeta, \eta$  平移了一段距离

$\zeta'_i, \eta'_i$  的度量存在一定误差是一种普遍现象, 它给测量带来的误差之分析可见文献[2]。因此本文只分析由原点置偏所引起的测量误差。

$\delta\zeta$  及  $\delta\eta$  与  $\zeta'_i$  及  $\eta'_i$  度量不准带来的测量误差性质是相同的, 所以由原点置偏造成的测量误差也可以用文献[2]的方法来分析。但这种分析太粗, 即它只能给出测量误差的数值分析, 而不能简单明了地给出测量误差随  $\delta\zeta$  及  $\delta\eta$  变化的关系式。并且也不能给出  $\delta\zeta$  及  $\delta\eta$  对各被测分量的影响。另外, 由于它的不等式放大很多, 故最后的结果较粗, 只能用于误差估计。再者, 熟悉矩阵范数(或称模)及态的人, 都知道计算是相当繁琐的, 而采用本文的分析法可得到简单明了的结果。

现在, 把(1)式展开, 得

$$\frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta}{f} \left[ 1 - \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2f^2} + \dots \right] + \Delta z \left[ 1 - \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2f^2} + \dots \right] = n\lambda + \Delta r \cdot m \quad (3)$$

设我们研究的范围是在  $\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}/f \leq \frac{1}{5}$  之内(一般傅里叶透镜都能满足), 则分两种情况讨论。

1.  $|\Delta z| \gg \left| \frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta}{f} \right|$ , 则只保留(3)式第一括号内的第一项和第二括号内第一及第二项。误差不会超过 5%, 于是

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta}{f} + \Delta z \left( 1 - \frac{\zeta^2 + \eta^2}{2f^2} \right) \\ (11) \quad & = n\lambda + \Delta r \cdot m \end{aligned}$$

配方整理后得:

$$\begin{aligned} & \left( \zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 + \left( \eta - \frac{\Delta y}{\Delta z} f \right)^2 \\ & = 2f^2 \left( -\frac{n\lambda + \Delta r \cdot m}{\Delta z} + 1 \right) \\ & + \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta z} f \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

把四个测点的准确坐标值  $\zeta_i = \zeta'_i + \delta_i$  及  $\eta_i = \eta'_i + \delta\eta$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) 分别代入(4)式并相减, 得

$$\begin{aligned} & \left( \zeta'_i + \delta\zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 - \left( \zeta'_0 + \delta\zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 \\ & + \left( \eta'_i + \delta\eta - \frac{\Delta y}{\Delta z} f \right)^2 \\ & - \left( \eta'_0 + \delta\eta - \frac{\Delta y}{\Delta z} f \right)^2 \\ & = -\frac{2f^2}{\Delta z} \Delta n_{i0} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式解得的  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  及  $\Delta z$  是准确值。

把四个测点的近似坐标值  $\zeta'_i$  及  $\eta'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) 分别代入(4)式并相减, 这时解得的位移值是测量值。以  $\Delta x^*$ ,  $\Delta y^*$  及  $\Delta z^*$  表示有:

$$\begin{aligned} & \left( \zeta'_i - \frac{\Delta x^*}{\Delta z^*} f \right)^2 - \left( \zeta'_0 - \frac{\Delta x^*}{\Delta z^*} f \right)^2 \\ & + \left( \eta'_i - \frac{\Delta y^*}{\Delta z^*} f \right)^2 - \left( \eta'_0 - \frac{\Delta y^*}{\Delta z^*} f \right)^2 \\ & = -\frac{2f^2}{\Delta z^*} \Delta n_{i0} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6)$$

比较(6)式及(5)式的对应项, 可知

$$\begin{cases} \delta\zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f = -\frac{\Delta x^*}{\Delta z^*} f \\ \delta\eta - \frac{\Delta y}{\Delta z} f = -\frac{\Delta y^*}{\Delta z^*} f \\ \Delta z = \Delta z^* \end{cases}$$

从而可得  $x$  方向的测量误差

$$\left| \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta x^* - \Delta x}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta z}{\Delta x} \right| \left| \frac{\delta\zeta}{f} \right| \quad (7)$$

$y$  方向的测量误差

$$\left| \frac{\delta(\Delta y)}{\Delta y} \right| = \left| \frac{\Delta y^* - \Delta y}{\Delta y} \right| = \left| \frac{\Delta z}{\Delta y} \right| \left| \frac{\delta\eta}{f} \right| \quad (8)$$

$z$  方向没有测量误差, 即

$$\left| \frac{\delta(\Delta z)}{\Delta z} \right| = 0$$

总位移测量误差

$$\left| \frac{\delta(\Delta r)}{\Delta r} \right| = \frac{\sqrt{\delta^2(\Delta x) + \delta^2(\Delta y) + \delta^2(\Delta z)}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

由(7)及(8)式代入上式, 得:

$$\left| \frac{\delta(\Delta r)}{\Delta r} \right| = \frac{1}{f} \cdot \frac{\sqrt{\delta\zeta^2 + \delta\eta^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2}}$$

$\leq \frac{1}{f} \sqrt{\delta\zeta^2 + \delta\eta^2}$   
如“+”字形坐标原点置偏差  $\delta\zeta = \delta\eta = 0.5 \text{ mm}$  (这极易做到) 和  $f = 300 \text{ mm}$  时, 则总位移测量误差小于  $\frac{1}{300} \times \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.24\%$

2.  $|\Delta z|$  不是  $\gg \left| \frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta}{f} \right|$ , 则(3)式略去高阶小量后成为:

$$\frac{\Delta x \zeta + \Delta y \eta}{f} + \Delta z = n\lambda + \Delta r \cdot m$$

上式描述的条纹是一簇直线, 对  $\zeta', \eta'$  坐标系原点的任意放置不会给测量带来误差, 所以采用“+”字标记是可取的, 这使得计算大为简化。

### 三、灵敏度分析

灵敏度可用物体单位位移引起全息片上两点之间的条纹数目的变化量来表示。在全息片上找两点  $(\zeta_1, \eta_1)$  及  $(\zeta_2, \eta_2)$ , 设对应的条纹级数分别是  $n_1$  和  $n_2$ , 分别代入(1)式并相减, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \zeta_2 + \Delta y \eta_2 + \Delta z f}{\sqrt{\zeta_2^2 + \eta_2^2 + f^2}} - \frac{\Delta x \zeta_1 + \Delta y \eta_1 + \Delta z f}{\sqrt{\zeta_1^2 + \eta_1^2 + f^2}} \\ & = (n_2 - n_1)\lambda = \Delta n_{21}\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式作偏微分得

$x$  方向灵敏度



$$\frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta x)} = \left( \frac{\zeta_2}{\sqrt{\zeta_2^2 + \eta_2^2 + f^2}} - \frac{\zeta_1}{\sqrt{\zeta_1^2 + \eta_1^2 + f^2}} \right) / \lambda$$

y 方向灵敏度

$$\frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta y)} = \left( \frac{\eta_2}{\sqrt{\zeta_2^2 + \eta_2^2 + f^2}} - \frac{\eta_1}{\sqrt{\zeta_1^2 + \eta_1^2 + f^2}} \right) / \lambda$$

z 方向灵敏度

$$\frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta z)} = \left( \frac{f}{\sqrt{\zeta_2^2 + \eta_2^2 + f^2}} - \frac{f}{\sqrt{\zeta_1^2 + \eta_1^2 + f^2}} \right) / \lambda$$

对于  $6 \times 9 \text{ cm}$  尺寸的全息片, 如取  $\zeta_1 = \eta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = \eta_2 = 60 \text{ mm}$ ,  $f = 300 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ , 代入上式计算得

$$\frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta x)} = \frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta y)} = 0.304 \text{ cycl}/\mu\text{m}$$

$$\frac{\partial(\Delta n_{21})}{\partial(\Delta z)} = -0.0597 \text{ cycl}/\mu\text{m}$$

即这表明若在点  $(0, 0)$  和  $(60, 60)$  之间增加或减少一个条纹, 物体的单纯横向移动

$$\frac{1}{0.304} = 3.29 \mu\text{m} \text{ 或单纯的纵向移动}$$

$$\frac{1}{0.0597} = 16.76 \mu\text{m}.$$

在这种情况下, 横向灵敏度高于纵向灵敏度。

#### 四、可测范围

位移大时, 条纹变密。其上限受目视或仪器读出分辨率  $t$  的限制。由于条纹分布是不均匀的, 要分几种情况讨论。为简单起见, 设位移发生在  $x, z$  平面内, 即  $\Delta y = 0$ 。则(3)式可简化为如下近似式:

$$\begin{aligned} & \left( \zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 + \eta^2 \\ & = -\frac{2f^2}{\Delta z} n\lambda - \frac{2f^2}{\Delta z} (\Delta r \cdot m - \Delta z) \\ & + \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

其条纹密度为

$$\left| \frac{\partial n}{\partial \zeta} \right| = \frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} \left| \zeta - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| \quad (11)$$

(10)式说明条纹为一簇圆, 其圆心位于  $\zeta$  轴上  $\frac{\Delta x}{\Delta z}$  处。(11)式说明条纹密度成线性分布, 在圆心处最稀, 越向外越密。 $\zeta$  轴是条纹分布的一个梯度方向, 为了尽可能减小条纹读数误差, 读取条纹要沿梯度方向。要能正确数得条纹, 则条纹密度不能超过目视或仪器的读出分辨率  $t$ 。置全息片中心与透镜光轴重合, 设全息片宽度为  $2\zeta_0$ 。我们分两种情况来讨论。

(1) 设条纹圆心落在全息片上, 即

$\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| \leq \zeta_0$ 。这时, 可从圆心沿  $\zeta$  轴数条纹, 数到距圆心  $R$  处, 见图 3。由(11)式知,

该点密度  $\left| \frac{\partial n}{\partial \zeta} \right| = \frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} |R|$ , 为了保证

$$\frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} |R| \leq t$$

故  $R$  的选取至少应保证在  $R$  内能读取到 5~6 个条纹, 这样才能达到一定的测量精度。

(2) 设圆心落在全息片之外, 即  $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right|$

$< \zeta_0$ 。这时全息片上靠条纹圆心一边的条纹较稀, 在条纹极密时, 可数稀的一边, 当条纹较疏的一边是  $\zeta$  轴正向时, 则可在  $\zeta$  轴上从  $\zeta = \zeta_0 - R$  处数到  $\zeta = \zeta_0$  处, 见图 4 (当条纹较

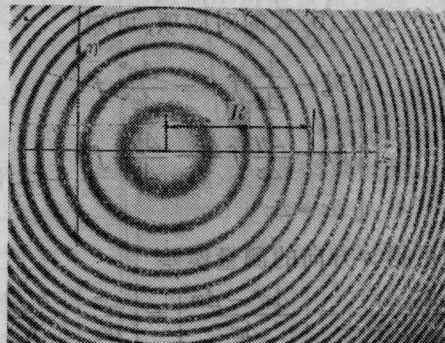


图 3 圆心在全息片之内又条纹极密时, 可读圆心到距圆心  $R$  处之内的条纹

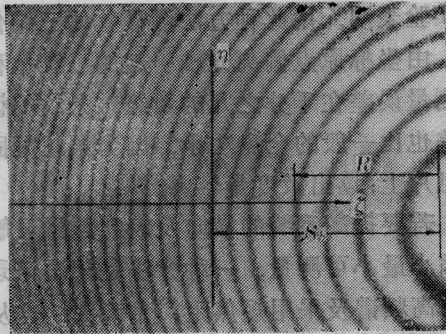


图4 圆心在全息片之外又条纹极密时,可读取条纹稀的一边

疏的一边是  $\zeta$  轴负向时,则在  $\zeta$  轴上从  $\zeta = -\zeta_0 + R$  处数到  $\zeta = -\zeta_0$  处)。由于  $\zeta = \zeta_0 - R$  处的密度较大,由(11)式算出的此点密度

$$\left| \frac{\partial n}{\partial \zeta} \right| = \frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} \left| \zeta_0 \pm R - \frac{\Delta n}{\Delta z} f \right|$$

不能大于  $t$ ,即:

$$\frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} \left| \zeta_0 \pm R - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| \leq t$$

综上所述可测范围上限,归结为如下两式

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| \leq \zeta_0 \\ \frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} |R| \leq t \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| > \zeta_0 \\ \frac{|\Delta z|}{f^2 \lambda} \left| \zeta_0 \pm R - \frac{\Delta x}{\Delta z} f \right| < t \end{cases} \quad (13)$$

当圆心在  $\zeta$  轴正向时  $R$  前取“+”号,反之取“-”号。

而可测范围下限,当位移变小时,条纹变宽。下限受到全息片记录到的物体最高频率的限制。设全息片记录到的最高频率  $\nu_{\max} = \frac{\zeta_0}{\lambda f}$ ,则在全息片上可取两点  $(0, 0)$  及  $(\zeta_0, 0)$ ,不管  $\zeta_0$  为正还是为负,这两点之间的条纹数不能少于一个条纹。用此两点坐标分别代入(10)式,并相减得:

$$\Delta x \frac{|\zeta_0|}{f} - \Delta z \frac{\zeta_0^2}{2f^2} = \Delta n \lambda$$

即应

$$|\Delta n| = \frac{1}{\lambda f} \left| \Delta x |\zeta_0| - \Delta z \frac{\zeta_0^2}{2f} \right| \geq 1 \quad (14)$$

由(12)、(13)及(14)式划出的区域即是可测区域,见图5,以打剖面线的部分表示。

如物体位移不限于  $x$  及  $z$  方向,是发生在任何方向的,则可测范围是图5以  $\Delta z$  轴为转轴的  $360^\circ$  回旋体。

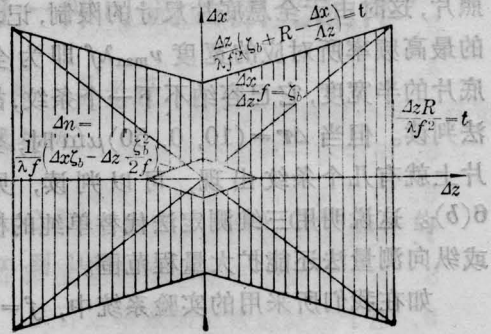
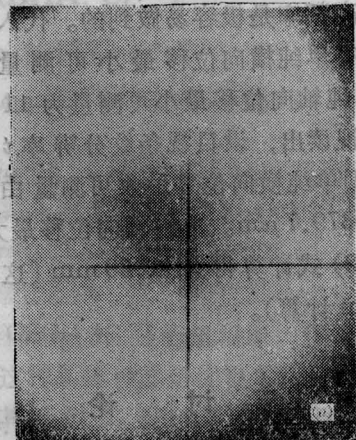
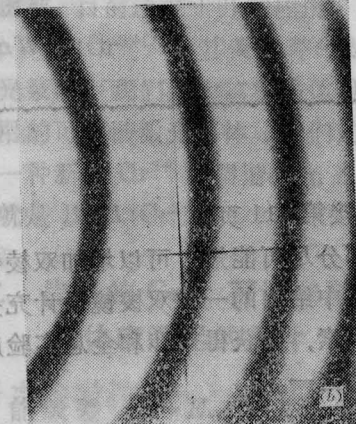


图5 相因子法可测范围图



$\Delta r = (0, 0, 50) \mu\text{m}$  时,相因子法得到的条纹



$\Delta r = (10, 0, 50) \mu\text{m}$  时,相因子法得到的条纹

图6 相因子法得到的条纹



图5还说明,若单纯横向位移小于可测下限而同时有一定纵向位移时,用此法还是可测的。同样,单纯纵向位移小于可测下限而同时有一定横向位移时,用此法也还是可测的。

例如图6(a)是  $\Delta r = (0, 0, 50) \mu\text{m}$  的照片,这时由于全息底片尺寸的限制,记录到的最高频率所对应的宽度  $\nu_{\max} \lambda f$  即为全息底片的半宽度,它已容纳不下一个条纹,故无法判读。但当  $\Delta r = (10, 0, 50) \mu\text{m}$  时,全息片上就有几个条纹出现,可以判读,见图6(b)。这说明用三维测定法代替单纯的横向或纵向测量法还能扩大量程范围。

如在我们所采用的实验系统中,  $f = 300 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ , 要记录  $\nu_{\max} = \frac{100}{\lambda f} 1/\mu$  作为最高频率是极容易做到的。代入(14)式计算,得单纯横向位移最小可测量为  $1.9 \mu\text{m}$ , 单纯轴向位移最小可测量为  $11.4 \mu\text{m}$ 。若以目视读出,设目视条纹分辨率  $t = 1 \text{ 条/mm}$ , 则单纯横向位移最大可测量由(13)式计算得  $379.7 \mu\text{m}$ 。单纯轴向位移最大可测量由(12)式计算得为  $11.39 \text{ mm}$  (这里取  $R = 10 \text{ mm}$  计算)。

## 五、讨 论

通过上面的分析并代以一定的数字计算

(上接第411页)

的悬空部分尽可能短,可以增加双棱镜的稳定性。文中给出的一种双棱镜设计充分考虑了以上因素,是获得干涉和全息实验成功的重要条件之一。

## 参 考 文 献

1 Tonomora Akira *et al.* *J. Electron Microsc.*, 1979;

和实验表明,用此种方法测量物体三维位移时,由坐标原点偏离光轴引起的三维位移矢量测量误差在千分之几的量级,条纹的读数误差也比一般的全息法小,因为条纹凝固在全息片上,读出及度量容易。

若要提高系统的横向及纵向测量灵敏度及缩小最小可测量,一种方法是想法记录物体的高频谱及采用短焦距广角镜头,这从灵敏度的表达式稍加分析即可明白。这对轴向灵敏度的提高尤其显著。但是,尽管如此,轴向灵敏度一般说来还是难以达到横向灵敏度的数值。若要大大提高轴向灵敏度,在许可的情况下使用另一种方法,即反射型实时法。物照明光方向矢  $m$  取为  $(0, 0, -1)$ 。这时,可从条纹明暗交替计数纵向连续位移量,其灵敏度为物体移动四分之一波长,条纹明暗交替一次,这样,纵向灵敏度提高一、二个数量级。相应的纵向最小可测量以目视判别可达  $1/4$  波长,最大可测量从理论上讲应为激光的相干长度。同时,由整个条纹簇的移动判别横向位移量,其灵敏度及可测范围不变。

## 参 考 文 献

- 1 陈明仪,华建文. 中国激光, 1987; 14(9): 540
- 2 Vest C. M. *Holographic Interferometry* (中译本), 机械工业出版社, 86~88
- 3 陈建文 *et al.* 光学学报, 1986; 6(1): 23
- 4 傅淑芬 *et al.* 光学学报, 1986; 6(3): 257
- 5 Fu Shufen *et al.* Abstracts of International Symposium on Electron Optics, Sept. 9~13, 1986, Beijing, China, p. 33
- 6 Fu Shufen *et al.* *Optik*, 1987, to be published soon