中国激光
第15卷 第6期

湍流介质中光像抖动的频率相关

张逸新

(华东工学院光电技术系)

提要 本文运用“马尔柯夫近似”获得了光在湍流大气中传输时，接收系统焦面上像斑抖动频率相关函数的一般关系式和弱光束湍流扩展区域内像斑抖动频率相关函数的解析式，同时讨论了光像抖动与光源波长的相关问题。

Quivering frequency correlation of optical images of laser light propagating in the turbulent medium

Zhang Yixin

(Department of Optical and Electrical Technology, East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract: The quivering frequency correlation function of optical images formed by a receiving system is obtained by means of the Markov approximation. The source is a laser beam propagating in a turbulent atmosphere. An analytic form of the frequency correlation function of the optical image quivers of laser beams propagating in the region of weak beam turbulent broadening is also obtained and the problem optical image quivers depending on the wavelength of the optical source is discussed.

一、引　言

光束通过湍流大气后在接收系统焦面上所成像斑的抖动在许多实际问题中常遇到。因此，像斑抖动问题的研究在激光大气传输究研课题中占有较重要的地位。自 Tatarskii 在专著[1]中首先以严格的波动理论讨论源像中心抖动方差以来，对此问题已有不少文献报道，其中包括无限平面波的传输[1]，不相干光源的像点抖动[2]，有限光束的传输[3]，两点源光波的源像闪烁空间相关[4]、两任意指向激光源光像的抖动相关[5]、经反射器反射后光像抖动的统计特性研究[6]等。但是，对于光源波长的差异对像点抖动有否影响则研究很少[7]。鉴于像点抖动主要来源于光束波阵面的畸变和光束大气抖动的特点和在大气工程中精确计算大气噪声的需要，光像抖动的频率相关问题有必要作进一步探讨。本文讨论了两束频率不同的重叠发射单色激光束通过湍流大气时，像点抖动的相关问题，并且得到了光像抖动频率相关函数的一般关系式。

收稿日期：1987年2月2日。

二、理论分析

由光束通过望远镜成像的分析可知，接收望远镜焦平面上像斑的位置可由像斑光强分布“重心”坐标 $\rho'_t(y_t, z_t)$ 描述[1]，即：

$$\boldsymbol{\rho}'_t=\frac{\int d^2\rho\boldsymbol{\rho}I(\boldsymbol{\rho})\tau(\boldsymbol{\rho})}{\int d^2\rho I(\boldsymbol{\rho})\tau(\boldsymbol{\rho})} \tag{1}$$

其中 $I(x, \boldsymbol{\rho})=u(x, \boldsymbol{\rho})u^*(x, \boldsymbol{\rho})$ 为 $x=$ 常数平面内的随机光强，$\tau(\boldsymbol{\rho})$ 为接收望远镜的光强透过函数。但是直接由(1)式计算像斑的位置偏离 $\boldsymbol{\rho}'_t(=\boldsymbol{\rho}_t-\langle\boldsymbol{\rho}_t\rangle)$ 的方差较复杂，所以理论上常用其它等价关系式。由描述激光大气传输的标量抛物方程：

$$2ik\frac{\partial}{\partial x}u(x, \boldsymbol{\rho})+\Delta_\rho u(x, \boldsymbol{\rho})+2k^2n_1(x, \boldsymbol{\rho})u(x, \boldsymbol{\rho})=0 \tag{2}$$

和描述微观客体运动的薛定谔方程：

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t)-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{r}, t)+V(\boldsymbol{r}, t)\psi(\boldsymbol{r}, t)=0 \tag{3}$$

的结构相似性，用类比法可得到像点的位置偏离[8]：

$$\boldsymbol{\rho}'_t=F_t\frac{\int_0^x d\xi\int d^2\rho\tau(\boldsymbol{\rho})I(\xi, \boldsymbol{\rho})\nabla_\rho n_1(\xi, \boldsymbol{\rho})}{\int d^2\boldsymbol{\rho}\tau(\boldsymbol{\rho})\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle} \tag{4}$$

这里 x 是大气路径，$n(\xi, \boldsymbol{\rho})$ 为介质折射率起伏，$\langle n_1\rangle=0$，

$$\nabla_\rho=\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

F_t 是接收望远镜焦距，Δ_ρ 是横向拉普拉斯算子，

$$\hbar=\frac{h}{2\pi},$$

h 是普朗克常数，m 为微观粒子质量，$V(\boldsymbol{r}, t)$ 为含时势函数，$\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 为波函数，

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

是光波波数。

类似于 Tatarskii 的方法[1]，我们把光场分解为复振幅 $A(\xi, \boldsymbol{\rho})$ 和实位相 $S(\xi, \boldsymbol{\rho})$ 两个因子的乘积，即

$$u(\xi, \boldsymbol{\rho})=A(\xi, \boldsymbol{\rho})e^{is(\xi, \rho)} \tag{5}$$

这里 $I(\xi, \boldsymbol{\rho})=A(\xi, \boldsymbol{\rho})A^*(\xi, \boldsymbol{\rho})$ 是光场的随机强度。根据文献[1]的讨论，我们可知(4)式的主要贡献来自波的位相起伏，强度起伏仅是像斑抖动的二级修正。那么，在上述近似下，式(2)中的随机场强 $I(\xi, \boldsymbol{\rho})$ 可以用平均场强 $\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho})\rangle$ 来近似，即(4)式可改写为下列表式：

$$\boldsymbol{\rho}'_t=F_t\frac{\int_0^x d\xi\int d^2\rho\tau(\boldsymbol{\rho})\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho})\rangle\nabla_\rho n_1(\xi, \boldsymbol{\rho})}{\int d^2\rho\tau(\boldsymbol{\rho})\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle} \tag{6}$$

记 $p_0=\int d^2\rho\tau(\boldsymbol{\rho})\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle$，

p_0 是接收系统接收到的总光通量。

下面我们仅限于考虑单模激光束的湍流大气传输(实际应用中也常是这种光束)，这种光束的光场在进入湍流层($x=0$)时具有形式：

$$u_0(\boldsymbol{\rho})=u_0\exp\left[-\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{ik}{2F}\right)\rho^2\right] \tag{7}$$

这里 a 是发射束等效半径，F 是波前曲率半径。由(7)式可求得通过湍流介质到达 x 平面处的光束平均光强[3]

$$\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle=\frac{u_0^2a^2}{a_{eff}^2(x)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{a_{eff}^2(x)}\right) \tag{8}$$

而

$$a_{eff}(x)=a\left[\left(1-\frac{x}{F}\right)^2+\Omega^{-2}+8\sigma_\chi^{12/5}\Omega^{-1}\right]^{1/2} \tag{9}$$

是光束在 x 处的等效半径，

$$\Omega=\frac{ka^2}{x}$$

是光源的菲涅尔数，$\sigma_\chi^2=0.308\,C_n^2k^{7/6}x^{11/6}$ 是对数振幅方差，C_n^2 是 $n_1(x, \boldsymbol{\rho})$ 起伏场的结构常数。为运算方便，我们采用高斯形式的接

收系统光强透过率函数[3]：

$$\tau(\boldsymbol{\rho})=t_0\exp\left(-\frac{\rho^2}{a_t^2}\right) \qquad (10)$$

其中 a_t 是望远镜的接收半径。

利用关系式(6)、(8)和(10)以及"马尔柯夫近似"，即场 $n_1(x, \boldsymbol{\rho})$ 的相关函数满足[1]：

$$B_n(x, \boldsymbol{\rho}, x', \boldsymbol{\rho}') =8\pi\delta(x-x')\int d^2K\phi_n(\boldsymbol{K}) \times\exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')]$$

则可得到源像抖动频率相关函数：

$$\boldsymbol{B}_t=\frac{2\pi}{p_0^2}\int_0^x d\xi\int d^2KK^2\phi_n(\boldsymbol{K})\int d^2\rho_1 \times\int d^2\rho_2\exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)] \times\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle \tau(\boldsymbol{\rho}_1)\tau(\boldsymbol{\rho}_2) \qquad (11)$$

其中 $\phi_n(\boldsymbol{K})$ 为三维湍流谱密度。

由平均光强关系式(6)，我们得到：

$$\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle\tau(\boldsymbol{\rho}_1)\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2\rangle\tau(\boldsymbol{\rho}_2) =\frac{u_0^4a^4t_0^2}{a_{eff}^2(\xi,\lambda_1)a_{eff}^2(\xi,\lambda_2)}\exp\Big[-\left(R^2+\frac{\rho^2}{4}\right) \times\left(\frac{1}{a_0^2(\lambda_1, \xi)}+\frac{1}{a_0^2(\lambda_2, \xi)}\right) -\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{R}\left(\frac{1}{a_0^2(\lambda, \xi_1)}-\frac{1}{a_0^2(\lambda_2, \xi)}\right)\Big] \qquad (12)$$

而 $\quad a_0^{-2}(\lambda, \xi)=a_t^{-2}+a_{eff}^{-2}(\lambda, \xi)$

$$2\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2, \ \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$$

将(12)式代入(11)式并分别对 R、ρ 积分，则

$$B_t=\frac{2\pi^2t_0^2}{p_0^2}\int_0^x d\xi\int d^2K\phi_n(\boldsymbol{K})K^2 \times\int d^2\rho\exp[i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\rho}] \times\exp\left\{-\left(\frac{2}{a_0^2(\lambda_1, \xi)+a_0^2(\lambda_2, \xi)}\right)\cdot\frac{\rho^2}{2}\right\} \times\frac{u_0^4a^4}{\left(\begin{array}{c}a_{eff}^2(\lambda_1, \xi)a_{eff}^2(\lambda_2, \xi)\\ \times[a_0^{-2}(\lambda_1, \xi)+a_0^{-2}(\lambda_2, \xi)]\end{array}\right)}$$

$$=\frac{4\pi^2\mu_0^4a^4t_0^2}{p_0^2}\int_0^x d\xi\int_0^\infty K^3\phi_n(\boldsymbol{K})dK \times\exp\left(-\frac{\varphi^2(\xi, \lambda_1, \lambda_2)}{2}K^2\right) \times\frac{a_0^2(\lambda_1, \xi)a_0^2(\lambda_2, \xi)}{a_{eff}^2(\lambda_1, \xi)a_{eff}^2(\lambda_2, \xi)}$$

其中

$$\varphi^2(\xi, \lambda_1, \lambda_2)=[a_0^2(\lambda_1, \xi)+a_0^2(\lambda_2, \xi)]/2。$$

在上式中应用包含湍流外尺度 L_0 的指数湍流谱[5]：

$$\phi_v(\boldsymbol{K})=0.033C_n^2K^{-11/3}\left[1-\exp\left(-\frac{K^2}{K_0^2}\right)\right]; \quad \left(K_0=\frac{2\pi}{L_0}\right) \qquad (13)$$

并对 K 积分，则得到适用于整个湍流起伏区的像斑抖动频率相关函数

$$B_t=\frac{0.066\pi^2C_n^2\Gamma(1/6)a_{eff}^2(\lambda_1, x)a_{eff}^2(\lambda_2, x)}{a_0^2(\lambda_1, x)a_0^2(\lambda_2, x)} \times\int_0^x d\xi\frac{a_0^2(\lambda_1, \xi)a_0^2(\lambda_2, \xi)}{a_{eff}^2(\lambda_1, \xi)a_{eff}^2(\lambda_2, \xi)} \times\left[\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{\varphi^2}{2}+\frac{1}{K_0^2}\right)^{-1/6}\right] \qquad (14)$$

其中已应用了：

$$p_0=\frac{a^2\pi a_0^2(\lambda_i, x)t_0u_0^2}{a_{eff}^2(\lambda_i, x)} \quad (i=1, 2)$$

关系式(14)是本文所得到的主要结果，在湍流扩展很小的区域，我们还可以进一步简化该式。根据像斑抖动的特点，我们可作 $I(\xi, \boldsymbol{\rho})=\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle$ 近似。从而得到弱湍流扩展区内的光像抖动频率相关函数解析式：

$$\boldsymbol{B}_t=0.066C_n^2\pi^2\Gamma(1/6)x \times\left[\left(\frac{\varphi^2(x, \lambda_1, \lambda_2)}{2}\right)^{-1/6} -\left(\frac{\varphi^2(x, \lambda_1, \lambda_2)}{2}+K_0^{-2}\right)^{-1/6}\right] \qquad (15)$$

如果设两束光的频率相同，即 $\lambda_1=\lambda_2$，

$$\varphi^2(\xi, \lambda_1, \lambda_i)=a_0^2(\lambda, \xi),$$

则单色光在湍流大气中传输的光像抖动方差

$$\sigma_i^2=0.066\pi^2C_n^2\Gamma(1/6)\frac{a_{eff}^4(x)}{a_0^4(x)}\int_0^x d\xi\frac{a_0^4(\xi)}{a_{eff}^4(\xi)} \times\left[\left(\frac{a_0^2(\xi)}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{a_0^2(\xi)}{2}+K_0^{-2}\right)^{-1/6}\right] \qquad (16)$$

并且在弱湍流扩展区域，可得到熟知的光像(单色光)抖动方差解析式[9]：

$$\sigma_i^2=0.066\pi^2\Gamma(1/6)C_n^2x$$

$$\times\left[\left(\frac{a_0^2(x)}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{a_0^2(x)}{2}+K_0^{-2}\right)^{-1/6}\right] \quad (17)$$

三、讨 论

上面我们在假定大气折射率起伏 n_1 沿光束传输方向满足 delta 相关条件下，应用马尔柯夫近似讨论了光像的抖动问题，得到了源像抖动频率相关函数 B_t。理论分析和实验研究结果表明[10]马氏近似几乎适用于整个大气湍流起伏区，所以我们所得到的(14)式是一个普适公式。

分析光像抖动频率相关函数 B_t，由 B_t 所含的因子 $\varphi(\xi, \lambda_1, \lambda_2)$ 我们可以得出光像抖动频率相关函数是光源波长的函数的结论。该结论可以从 $\varphi(\xi, \lambda_1, \lambda_2)$ 与光束等效半径的关系来说明，由 φ^2 的定义式可以知道 φ^2 是光束 $a_0^2(\lambda_i, \xi)$ $(i=1, 2)$ 的平均值，然而 a_0^2 则是 $a_{eff}^2(\lambda_i, \xi)$ 的函数。由文献[11]的讨论我们知道发射束光源的波长不同，光束通过同等湍流大气层后的等效半径 a_{eff} 也不同，这就说明了上述结论。从 B_t 的定义式：$\langle\boldsymbol{\rho}_t'(\lambda_1)\boldsymbol{\rho}_t'(\lambda_2)/F_t^2\rangle$ 和上述讨论我们可以进一步得出光像抖动和光源波长有关的结论。这个结果表示在实际大气工程中我们应注意到光像抖动的波长相关性。这种相关性我们还可以用下面的特例来进一步说明。我们考虑光在弱湍流扩展区域内传播，在此区域内由方程式(17)可得到特定条件下与光像抖动极大相对应的光源工作波长

$$\lambda_a = 4.23\, a^{5/3} C_n x^{1/2}。$$

λ_a 说明了上述波长相关推论的合理性。

上述频率相关性可用下面的"相关系数"来描述：

$$\Gamma_\lambda = B_t(\lambda_1, \lambda_2)/\sigma_t^2(\lambda) \quad (18)$$

在弱湍流扩展区可进一步简化为：

$$\Gamma_\lambda = \frac{\left[\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{\varphi^2}{2}+K_0^{-2}\right)^{-1/6}\right]}{\left[\left(\frac{a_0^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{a_0^2}{2}+K_0^{-2}\right)^{-1/6}\right]} \quad (19)$$

(18)式所定义的 Γ_λ 的含义是：当光像抖动与光源波长有关时 $\Gamma_\lambda = f(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$，与光源波长无关时应有 $\Gamma_\lambda = 1$ 的结论。

分析(18)式和(19)式我们可再次看到光像抖动与光源波长有关是和光束的等效半径相联系的。由导致光像抖动的机理可知，光束波阵面畸变和光束整体抖动是光像抖动的两主要生成因素，而光束抖动直接受光束等效半径的调制，故有上述结论。

下面我们讨论两种特殊情况。假如光束的湍流扩展足够小，以致于能用 $I(\xi, \boldsymbol{\rho}) \approx I(0, \boldsymbol{\rho})$，则由(18)式可得到 $\Gamma_\lambda = 1$，即光像抖动与光源波长无关，这实际上也说明使用

$$I(\xi, \boldsymbol{\rho}) \approx I(0, \boldsymbol{\rho})$$

近似已忽略了抖动的波长相关性。而如果湍流扩展远大于衍射扩展，即当

$$\sigma_\chi^{12/5} \gg \max\left[\left(1-\frac{x}{F}\right)^2 \Omega,\ \Omega^{-1}\right]$$

时，且 $a_{eff}^2 \gg a_t^2$，则 $\Gamma_\lambda \approx 1$，即光像抖动近似与光源波长无关。不过现在的 $\Gamma_\lambda \approx 1$ 是因为单色光的源像抖动已出现了饱和，致使波长差效应变得不明显了。

参 考 文 献

1 Tatarskii V L. The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation, National technical information service springfield, Va, 1971

2 Gurvich A S, Kallistratova M A. *Izv. Vyssh. Uchehn. Zaved., Radiofiz*, 1968; **11** (1): 66

3 Mironov V L *et al. Radiophys. and Qunt. Electron.*, 1980; **23** (4): 319

4 Gelfen E L. *Lzv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz*, 1974; **17** (8): 1180

5 Mironov V L *et al. Radiophys and Qunt. Electron.*, 1981; **24** (12); 985

6 Belov M L, Orlov V M. *Radiophys and Qunt. Electron.*, 1980; **23** (6): 490

7 张逸新·待发表

8 张逸新，量子电子学，1987; **4** (1): 70

9 Chiba T. *Appl. Opt.*, 1971; **10** (11): 2456

10 Tatarskii V L. *Progress in Optics*, 1980: **18**: 247

11 Plouns M A *et al. Appl. Opt.*, 1980; **19** (18): 3082