

## 电子全息术中静电双棱镜偏转特性的简化计算

陈建文

(中国科学院上海光机所)

**提要:** 本文采用经典电磁理论中的 Laplace 和 Lorentz 方程, 推导出电子束在静电双棱镜中的偏转角解析表达式, 并对某些实验结果作了解释。

**Simplified calculation method for deviation characteristics of electrostatic biprism in electron holography**

Chen Jianwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

**Abstract:** Analytical expression of the deviation angle for free-electrons in the electrostatic biprism is given using Laplace and Lorentz equations in classical electromagnetic theory and some experimental results are explained with the analytical expression.

## 一、引言

电子静电双棱镜亦称 Möllenstedt 静电双棱镜, 由于其工作特性类似于光学中的 Fresnel 双棱镜, 因此而得名。目前, 在电子干涉实验、干涉电子显微镜和电子全息术中已被广泛地用作电子分束器。这种分束器的优点是电子只和电场相互作用, 而不与客观实体发生相互作用。

许多文献<sup>[1~3]</sup>已对这种静电双棱镜的工作原理和结构作了详细描述。文献[1]还用电解槽模拟了这种双棱镜, 用实验方法测定了双棱镜电极附近的电场分布, 结果表明, 双棱镜内的电势变化与柱面电容器的电势分布

相似。但是作者在推导自由电子在这种双棱镜中的偏转角时, 又把双棱镜当成了平板电容器。

电子在分束器中的偏转角是一个非常重要的参数, 它直接决定电子束重叠区域的大小和干涉场的空间频率。文献[3]把双棱镜看成柱面电容器, 并考虑了它对电子路程的影响, 求取了自由电子在观察平面上的程差和干涉条纹间距, 按 Bragg 公式求出了电子在双棱镜中的偏转角, 但数学处理比较繁杂。

本文根据经典电磁理论, 从 Laplace 方程和 Lorentz 方程出发, 推导出自由电子在静电双棱镜中的偏转角, 不仅处理简捷, 而且在一定的实验参数条件下, 能给出所允许的

收稿日期: 1987年1月9日。

最大偏转角。

## 二、计算方法

假定电子显微镜中灯丝与双棱镜石英丝相互平行,如图1所示,并且假定镀金石英丝长度较其直径及到地电极的距离大得多,那么据经典电磁理论,空间无自由电荷分布时,电势  $V$  满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (1)$$

在柱坐标系内:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

式中  $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ , 在轴对称情况下:

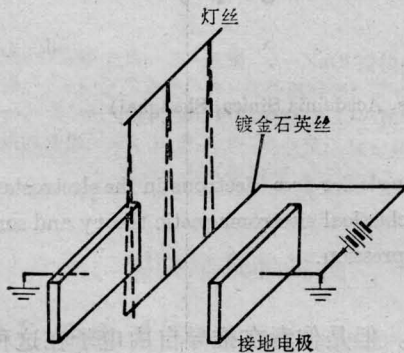


图1 静电双棱镜示意图

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

如果石英丝足够长,那么:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

因此,  $V = V(r)$ , 即:

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} = 0. \quad (3)$$

作变量代换,令  $r = e^\xi$ , 则

$$\frac{dr}{d\xi} = e^\xi,$$

那么

$$\frac{dV}{d\xi} = r \frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} = r \frac{dV}{dr} + r^2 \frac{d^2 V}{dr^2}. \quad (4)$$

将(4)代入(3)得

$$V = C_1 \xi + C_2 = C_1 \ln r + C_2, \quad (5)$$

代入静电双棱镜的边界条件,

$$r = r_0 \text{ 时, } V = V_f, \quad r = b_1 \text{ 时, } V = 0.$$

式中  $b_1$  为双棱镜石英电极到地电极间的距离。很容易求得双棱镜内时电势分布为:

$$V(x_0, z_0) = \begin{cases} \frac{V_f}{2 \ln(r_0/b_1)} \ln \left( \frac{x^2 + z^2}{b^2} \right), & (r^2 \leq x^2 + z^2 \leq b_1^2); \\ 0, & (b_1^2 < x^2 + z^2). \end{cases} \quad (6)$$

这个结果与 Möllenstedt 当年用电解槽模拟静电双棱镜所获实验结果完全一致。

当电子枪中的自由电子经过此双棱镜时,受棱镜中的电场作用,运动方程可用 Lorentz 方程描述:

$$\frac{d}{dt} m \dot{x} = -|e| E_x. \quad (7)$$

$$\text{而 } E_x = -(\nabla V)_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

因此:

$$d\dot{x} = \frac{|e|}{mV_0} \frac{\partial V}{\partial x} dz, \quad (8)$$

式中,  $dz = V_0 dt$ ,  $m$  和  $e$  分别为自由电子的静止质量和电荷量,由(8)式得:

$$\dot{x} = \frac{|e|}{m} \int_{-\sqrt{b_1^2 - x^2}}^{\sqrt{b_1^2 - x^2}} \frac{\partial V}{\partial x} dz. \quad (9)$$

如图2所示:

$$\dot{x} \approx V_0 \operatorname{tg} \alpha \approx V_0 \alpha.$$

由于  $\alpha$  通常小于  $10^{-3}$ , 故在弱场近似条件下,  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , 因此:

$$\alpha = \frac{|e|}{mV_0^2} \int_{-\sqrt{b_1^2 - x^2}}^{\sqrt{b_1^2 - x^2}} \frac{\partial V}{\partial x} V(x, z) dz. \quad (10)$$

将(6)代入(10)式:

$$\alpha = \frac{2|e|V_f}{mV_0^2 \ln(r_0/b_1)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{b_1^2 - x^2}}{x}.$$

由于  $b_1 \gg x$ ,  $\sqrt{b_1^2 - x^2} \approx b_1$ ,  $\frac{b_1}{x} \rightarrow \infty$

在不考虑相对论效应时,

$$mV_0^2/2 = eV_a,$$

式中  $V_a$  为电子的加速电压, 那么

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln(r_0/b_1)} \frac{V_f}{V_a}. \quad (11)$$

这个结果和文献[3]中给出的解折表达式完全一致。

$\alpha$  符号的确定为图 3 所示:

$$V_f > 0 \begin{cases} x > 0, & \alpha < 0, \\ x < 0, & \alpha > 0; \end{cases}$$

$$V_f < 0 \begin{cases} x > 0, & \alpha > 0; \\ x < 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

我们通常把  $V_f < 0$  的双棱镜 (即在双棱镜上施加一负电压) 称作发散双棱镜, 把  $V_f > 0$  的双棱镜称作会聚双棱镜。

自由电子经双棱镜偏转以后, 将发生重叠, 由于电子的波动特性, 在重叠区产生干涉, 干涉条纹的间距为:

$$S = \frac{\lambda(a+b)}{2a\alpha}, \quad (12)$$

如图 4 所示, 式中  $a$  为有效电子束源到双棱镜石英丝的距离,  $b$  为石英丝到干涉平面  $W$  的距离, 而重叠区域的大小, 由简单的几何关系可以推导出:

$$W = \frac{b\alpha - r_0(a+b)}{a}. \quad (13)$$

因此所能获得的干涉条纹数为:

$$N = \frac{W}{s} = \frac{4ab\alpha^2}{\lambda(a+b)} - \frac{2r_0\alpha}{\lambda}, \quad (14)$$

式中  $\lambda$  为电子的德布罗意波长。从上式可以看出, 当实验布局已确定以后, 所获条纹总数, 在不考虑电子束源的相干性时, 取决于偏转角  $\alpha$ , 即取决于双棱镜上施加的电压值。

如果电子束源是一部分相干源, 即电子束源具有一线度  $\varepsilon$ , 并假定电子束源发射电子密度沿  $\varepsilon$  的分布是一个高斯函数, 即:

$$F_1(\varepsilon) = \varepsilon_0^{-1} (2\pi)^{-1/2} \exp(-\varepsilon^2/2\varepsilon_0^2), \quad (15)$$

并假定由于电压波动, 使得电子密度沿波长的分布亦是一个高斯函数

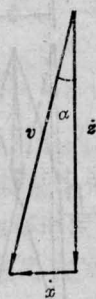
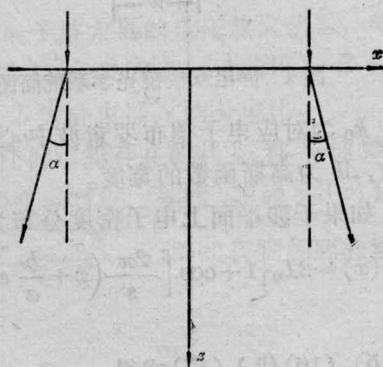
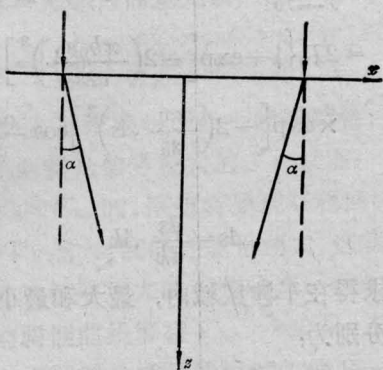


图 2 速度向量图



(a)



(b)

图 3 夹角  $\alpha$  符号的定义

$$F_2(k) = 2(\Delta k)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \times \exp[-(k-k_0)^2/2(\Delta k)^2], \quad (16)$$

这里  $F_1(\varepsilon)$ 、 $F_2(k)$  分别满足以下归一化条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\varepsilon) d\varepsilon = 1;$$

$$\int_0^{\infty} F_2(k) dk = 1,$$

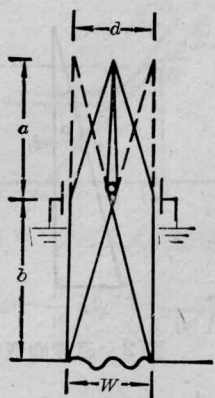


图4 静电双棱镜光学系统简图

式中  $k_0$  为对应电子德布罗意波中心波长的波数,  $\Delta k$  为高斯函数的宽度。

如果干涉平面上电子密度分布为:

$$I(x) = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{s} \left( x + \frac{b}{a} \varepsilon \right) \right] \right\}. \quad (17)$$

将(15)、(16)代入(17)式得

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I(x, k, \varepsilon) F_1(\varepsilon) F_2(k) d\varepsilon dk \\ &= 2I_0 \left\{ 1 + \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi x}{s_0^2} \Delta s \right)^2 \right] \cos \frac{\alpha \pi x}{s_0} \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

式中  $\Delta s = \frac{ds}{dk} \Delta k_0$

很易求得在干涉区域内, 最大和最小的电子密度分别为:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 2I_0 \left\{ 1 + \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi \Delta s}{s_0^2} x \right)^2 \right] \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\min} &= 2I_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi \Delta s}{s_0^2} x \right)^2 \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

如只考虑束源线度的影响, 即令  $\Delta k = 0$ , 按照 Rayleigh 判据:

$$\frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{1 - \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} \right)^2 \right]}{1 + \exp \left[ -2 \left( \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} \right)^2 \right]} < 0.8. \quad (19)$$

求得:  $\frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{a_0 s_0} < (\ln 3)^{1/2}$ ,

$$\alpha_0 < \frac{(a+b)(\ln 3)^{1/2}}{k_0 b_0 \varepsilon_0}. \quad (20)$$

(20)式表明, 当  $a, b, \varepsilon, k$  确定以后,  $\alpha$  不可以任意取值, 这是一个重要的结果, 因为从(14)式看出, 只要增大偏转角, 即增加双棱镜石英丝上的外加电压, 就可以得到任意多的干涉条纹数, 在许多文献中, 普遍采用上述公式进行讨论, 然而实验结果表明, 当外加电压达到一定值以后, 就观察不到干涉条纹, 原因就是不能满足方程(20)的结果。

本工作是在意大利的里雅斯特(Trieste)国际理论物理中心(ICTP)资助下进行的。

### 参 考 文 献

- [1] Möllenstedt G, Duker H. *Z. Physik*, 1956; **145**(3): 373
- [2] Tonomura A et al. *J. Electron Microsc.*, 1979; **28**(1): 1
- [3] 陈建文. 光学学报, 1985; **5**(3): 229